ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

28 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Δεύτερη Φάση)

Κυριακή, 13 Απριλίου 2014

Ώρα: 10:00 - 13:00

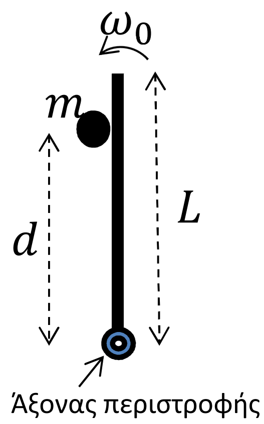
Οδηγίες:

1) ***Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και έξι (6) θέματα.***
2) ***Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.***
3) ***Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.***
4) ***Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.***
5) ***Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).***
6) ***Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.***
7) ***Δίνεται:*** $\boldsymbol{g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}}$ **.**

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο: (Μονάδες 20)

Α) Μια ομοιόμορφη ράβδος μάζας m και μήκους L (η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που περνά από το άκρο της είναι $I = mL^2/3$) έχει το ένα άκρο της στερεωμένο σε ένα άξονα και μπορεί να περιστρέφεται πάνω σε ένα οριζόντιο τραπέζι χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_0. Μια μπάλα μάζας m επίσης, τοποθετείται πάνω στο τραπέζι σε απόσταση d από το σημείο περιστροφής και η ράβδος συγκρούεται ελαστικά μαζί της.



α) Ποιά είναι η ταχύτητα της μπάλας μετά τη σύγκρουση σε συνάρτηση με την απόσταση d; **(μονάδες 5)**

β) Για ποιά τιμή της απόστασης d η ταχύτητα αυτή γίνεται μέγιστη; **(μονάδες 5)**

(α) Η ενέργεια διατηρείται αφού η κρούση είναι ελαστική. Η ορμή δε διατηρείται αφού υπάρχει εξωτερική δύναμη στον άξονα περιστροφής. Η στροφορμή στον άξονα περιστροφής διατηρείται αφού η εξωτερική δύναμη περνά από τον άξονα και άρα δεν υπάρχουν εξωτερικές ροπές.
Από διατήρηση της ενέργειας:

$$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}I\omega_f^2 + \frac{1}{2}mu^2 \Rightarrow I\left(\omega_0^2 - \omega_f^2\right) = mu^2 \Rightarrow$$
$$I(\omega_0 - \omega_f)(\omega_0 + \omega_f) = mu^2 \quad (1) \quad \textbf{(1 μονάδα)}$$

Από διατήρηση της στροφορμής:

$I\omega_0 = I\omega_f + mud \Rightarrow I(\omega_0 - \omega_f) = mud \ (2)$ **(1 μονάδα)**

Διαιρώντας την (1) με τη (2) έχουμε:

$\omega_0 + \omega_f = \frac{u}{d} \Rightarrow \omega_f = \frac{u}{d} - \omega_0 \ (3)$ **(2 μονάδες)**

Αντικαθιστώντας την (3) στη (2) παίρνουμε:

$$I\left(\omega_0 - \frac{u}{d} + \omega_0\right) = mud \Rightarrow I\left(2\omega_0 - \frac{u}{d}\right) = mud \Rightarrow$$

$\frac{mL^2}{3}\left(2\omega_0 - \frac{u}{d}\right) = mud \Rightarrow \frac{2\omega_0 L^2}{3} = u\left(d + \frac{L^2}{3d}\right) \Rightarrow u = \frac{2\omega_0 L^2}{3d + \frac{L^2}{d}}$ **(1 μονάδα)**

(β) <u>α’ τρόπος</u>

Για να γίνει η ταχύτητα μέγιστη πρέπει ο παρανομαστής να γίνει ελάχιστος. **(2 μονάδες)** Παραγωγίζοντας ως προς d τον παρανομαστή έχουμε:

$\frac{d\left(3d + \frac{L^2}{d}\right)}{dd} = 3 - \frac{L^2}{d^2} = 0 \Rightarrow d = \frac{L}{\sqrt{3}}$ **(3 μονάδες)**

<u>β’ τρόπος</u>

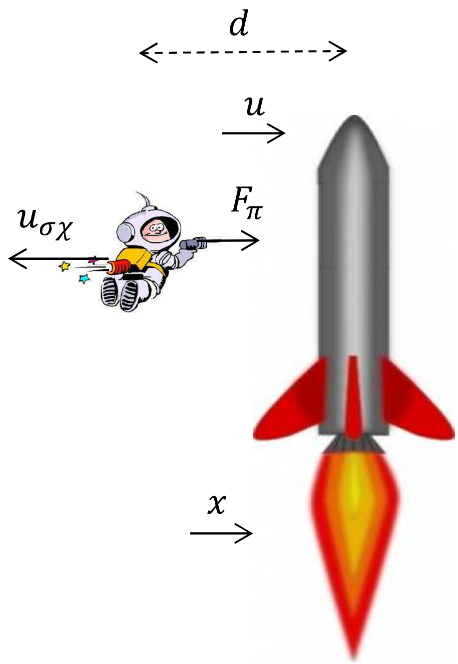
Η μέγιστη ταχύτητα u (δηλαδή η μέγιστη κινητική ενέργεια) συμβαίνει όταν η κινητική ενέργεια της ράβδου γίνει ελάχιστη. Όταν δηλαδή $\omega_f = 0$ Στη περίπτωση αυτή, η διατήρηση της ενέργειας και της στροφορμής δίνουν:

$\frac{1}{2}I\omega_0^2 = \frac{1}{2}mu_{max}^2 \Rightarrow u_{max} = \sqrt{\frac{I}{m}}\omega_0 \ (4)$ **(2 μονάδες)**

$I\omega_0 = mu_{max}d \ (5)$ **(2 μονάδες)**

Από (4) και (5) παίρνουμε: $I\omega_0 = m\left(\sqrt{\frac{I}{m}}\omega_0\right)d \Rightarrow d = \sqrt{\frac{I}{m}} = \sqrt{\frac{\frac{1}{3}mL^2}{m}} \Rightarrow d = \frac{L}{\sqrt{3}}$ **(1 μονάδα)**

Β) Αστροναύτης με συνολική μάζα $M = 100$ kg (μαζί με τη στολή του), μετά από κάποιο ατύχημα στο διαστημικό χώρο, απομακρύνθηκε από το διαστημόπλοιο του σε απόσταση $d = 500$ m, από αυτό. Η φιάλη του οξυγόνου που είναι ενσωματωμένη στη στολή του περιέχει οξυγόνο μάζας $m_0 = 0{,}3$ kg. Ο αστροναύτης μπροστά στον κίνδυνο να χαθεί για πάντα στο διάστημα, αποφάσισε να εκτοξεύσει μέρος από το οξυγόνο, μέσω της βαλβίδας εισπνοής, ώστε το εξερχόμενο οξυγόνο με ταχύτητα $u_{\sigma\chi} = 50\ m/s$, να δημιουργήσει προωστική δύναμη (F_π), η οποία να τον επαναφέρει πάλι πίσω στο διαστημόπλοιο. Το πρόβλημα όμως που υπάρχει είναι ότι ο αστροναύτης χρειάζεται και οξυγόνο για την αναπνοή του, σε όλο το χρονικό διάστημα που βρίσκεται εκτός διαστημοπλοίου. Αν γνωρίζουμε ότι ο αστροναύτης αναπνέει οξυγόνο με ρυθμό $\Delta m/\Delta t = 10^{-5}$ kg/s, και η προωστική δύναμη δίνεται από την σχέση $F_\pi = u_{\sigma\chi} \cdot \Delta m/\Delta t$, ποιά είναι η ελάχιστη ποσότητα Δm του οξυγόνου που πρέπει να εκτοξευθεί, ώστε ο αστροναύτης να φθάσει σώος στο διαστημόπλοιο χωρίς να του περισσέψει οξυγόνο;



(μονάδες 10)

Ο αστροναύτης βρίσκεται μετέωρος σε μια απόσταση d από το διαστημόπλοιο του. Πρέπει κατά τη διάρκεια Δt της εκτόξευσης του οξυγόνου να αποκτήσει μια ταχύτητα u, τέτοια που να είναι αρκετή, ώστε κινούμενος από εκεί και μετά ευθύγραμμα και ομαλά να φθάσει στο διαστημόπλοιο σε χρόνο t, αρκετό ώστε να μην πεθάνει από ασφυξία, από έλλειψη δηλαδή οξυγόνου, διανύοντας την απόσταση d.

Πρέπει: $$u = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{u} \quad (1)$$ **(1 μονάδα)**

Την ταχύτητα u, ο αστροναύτης θα την αποκτήσει τελικά, εξαιτίας της επιτάχυνσης που θα αναπτυχθεί σε αυτόν από την προωστική δύναμη, που θα δημιουργήσει το εκτοξευόμενο οξυγόνο.

Επομένως στον άξονα κίνησης του αστροναύτη έχουμε:

$$F_\pi \Delta t = Mu \ \Rightarrow\ u_{\sigma\chi}\frac{\Delta m}{\Delta t}\Delta t = Mu \ \Rightarrow u = \frac{u_{\sigma\chi}\Delta m}{M} \quad (2)$$ **(2 μονάδες)**

(σε αυτή τη φάση θεωρούμε ότι η μάζα Δm που εκτοξεύτηκε σε σχέση με την M είναι αμελητέα, και πράγματι, όπως αποδεικνύεται πιο κάτω είναι).

Από (1) και (2) παίρνουμε:

$$t = \frac{dM}{u_{\sigma\chi}\Delta m} \quad (3)$$ **(1 μονάδα)**

Οι συνθήκες έλλειψης οξυγόνου δίνουν την εξής σχέση για τη μάζα του οξυγόνου:

$$m_0 = \Delta m + Rt \quad (4)$$ **(1 μονάδα)**

όπου R=Δm/Δt είναι ο ρυθμός με τον οποίο ο αστροναύτης αναπνέει οξυγόνο.

Από (3) και (4) έχουμε:

$$\Delta m^2 - m_0\Delta m + \frac{RMd}{u_{\sigma\chi}} \Rightarrow \Delta m^2 - 0.3\Delta m + 0.01 = 0 \Rightarrow \begin{cases} \Delta m_1 = 0.262\ \text{kg} \\ \Delta m_2 = 0.0382\ \text{kg} \end{cases}$$ **(2 μονάδες)**

και οι δύο λύσεις είναι θετικές και έχουν φυσικό νόημα. Αν ο αστροναύτης εκτοξεύσει την Δm_1, τότε ο χρόνος που θα χρειαστεί για να φθάσει στο διαστημόπλοιο είναι $t_1 = 3816s$ όπως προκύπτει από την (3). Αν εκτοξεύσει την Δm_2, τότε θα χρειαστεί χρόνο $t_2 = 26178s$. Συνεπώς στη δεύτερη περίπτωση χρειάζεται να εκτοξεύσει λιγότερο οξυγόνο και παρόλο που φθάνει πιο αργά στο διαστημόπλοιο το υπόλοιπο οξυγόνο το χρησιμοποιεί για να αναπνέει χωρίς κανένα πρόβλημα. Και στις δύο περιπτώσεις θα καταναλώσει ίση ποσότητα οξυγόνου, αλλά με διαφορετικό τρόπο κάθε φορά. **(3 μονάδες)**

Όσον αφορά την επιλογή της εκτοξευόμενης μάζας είναι προτιμότερο να εκτοξεύσει την Δm_1, ώστε να φθάσει στο διαστημόπλοιο πιο γρήγορα προς αποφυγή απροόπτων στο διαστημικό χώρο.

ΘΕΜΑ 2ο: (Μονάδες 15)

Α. α) Να εξηγήσετε τί είναι το φαινόμενο της συμβολής δύο κυμάτων.

(μονάδες 2)

Συμβολή δύο κυμάτων σε ένα σημείο ονομάζεται το αποτέλεσμα της συνάντησης των δύο κυμάτων στο σημείο αυτό.

β) Να διατυπώσετε τις συνθήκες ενισχυτικής και καταστροφικής συμβολής δύο κυμάτων.

(μονάδες 2)

Ενισχυτική συμβολή δύο κυμάτων, που παράγονται από σύμφωνες και σύγχρονες πηγές, σε ένα σημείο συμβαίνει όταν τα δύο κύματα φθάνουν στο σημείο με διαφορά φάσης ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π, δηλαδή, $\Delta\varphi = K \cdot 2\pi,\ K = 0, 1, 2, \ldots$ ή, ισοδύναμα, όταν η διαφορά δρόμου των δύο κυμάτων από τις πηγές μέχρι το σημείο είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μήκους κύματος, δηλαδή, $|\Delta x| = K \cdot \lambda,\ K = 0, 1, 2, \ldots$ **(1 μονάδα)**. Ανάλογα, για την περίπτωση της καταστροφικής συμβολής θα πρέπει να ισχύουν οι σχέσεις $\Delta\varphi = (2K + 1) \cdot \pi,\ K = 0, 1, 2, \ldots$ ή $|\Delta x| = (2K + 1) \cdot \frac{\lambda}{2},\ K = 0, 1, 2, \ldots$ **(1 μονάδα).**

Β. Να περιγράψετε μια πειραματική διαδικασία με την οποία, **αξιοποιώντας το φαινόμενο της συμβολής κυμάτων**, να μετρήσετε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα. Στην περιγραφή σας θα πρέπει να υπάρχουν τα πιο κάτω:

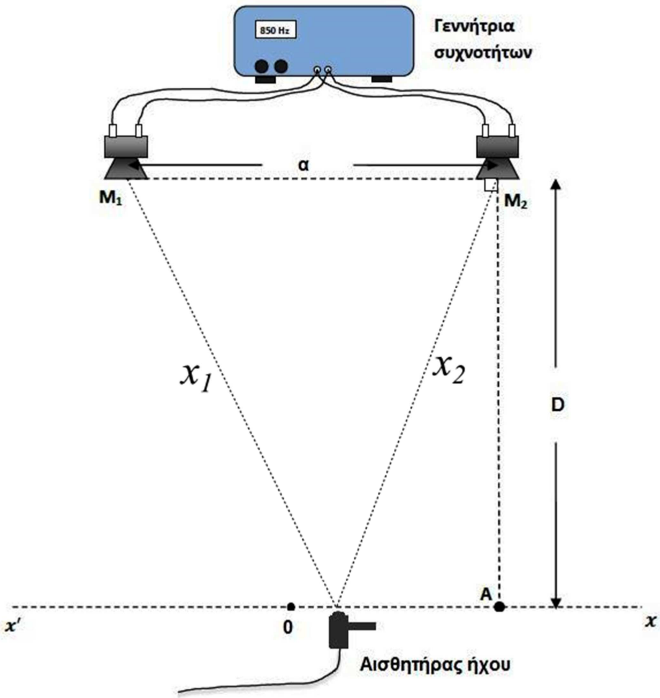
α) Σχήμα της πειραματικής διάταξης και κατάλογος των οργάνων, συσκευών και υλικών που θα χρησιμοποιήσετε.

(μονάδες 4)

Συσκευές: Γεννήτρια συχνοτήτων, δύο όμοια μεγάφωνα, αισθητήρας ήχου, διασύνδεση και ΗΥ (ή μικρόφωνο και παλμογράφος).
Όργανα: χάρακας.

Υλικά: καλώδια σύνδεσης των συσκευών (4).

(2 μονάδες)



Εικόνα 1 (2 μονάδες)

ΣΗΜΕΙΩΣΗ: Εδώ, όπως και στα επόμενα σημεία του θέματος, περιγράφεται μόνο ένα συγκεκριμένο πείραμα μέτρησης της ταχύτητας του ήχου. Άλλο πείραμα θα μπορούσε να είναι, για παράδειγμα, η δημιουργία στάσιμου κύματος με τα δύο μεγάφωνα και η μέτρηση της απόστασης μεταξύ των δεσμών (ή των κοιλιών) του και στη συνέχεια ο υπολογισμός της ταχύτητας του ήχου, κ.α.

β) Σύντομη θεωρία, με τη βοήθεια της οποίας θα υπολογίσετε την ταχύτητα του ήχου στον αέρα.

(μονάδες 4)

Τα δύο μεγάφωνα είναι σύμφωνες και σύγχρονες πηγές ηχητικών κυμάτων. Τα δύο κύματα φθάνουν στο σημείο 0, το οποίο βρίσκεται στη μεσοκάθετο του ευθύγραμμου τμήματος M_1M_2 με μηδενική διαφορά δρόμου. Άρα εκεί παρατηρείται συμβολή ενίσχυσης και ο αισθητήρας ήχου θα καταγράψει μέγιστη ένταση του ήχου **(1 μονάδα)**. Μετακινώντας τον αισθητήρα ήχου κατά μήκος της ευθείας $x'x$, που είναι παράλληλη με το M_1M_2, εντοπίζουμε τα επόμενα σημεία στα οποία η ένταση του ήχου είναι μέγιστη. Σε αυτά τα σημεία η διαφορά δρόμου των δύο κυμάτων είναι $1\lambda, 2\lambda, 3\lambda, \ldots$ **(1 μονάδα)**. Μετρώντας στο πείραμα τη διαφορά δρόμου μπορούμε να υπολογίσουμε το μήκος του κύματος που παράγεται από τα δύο μεγάφωνα **(1 μονάδα)**. Αφού η συχνότητα του ήχου που παράγουν τα δύο μεγάφωνα είναι γνωστή, υπολογίζουμε την ταχύτητα του ήχου χρησιμοποιώντας τη σχέση $u = \lambda \cdot f$ **(1 μονάδα)**.

γ) Περιγραφή της διαδικασίας λήψης και επεξεργασίας των μετρήσεων.

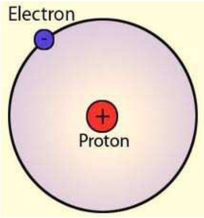
(μονάδες 3)

Εντοπίζουμε τα σημεία στην ευθεία $x'x$ στα οποία παρατηρείται μέγιστη ένταση του ήχου. Για κάθε σημείο μετρούμε με το χάρακα τις αποστάσεις x_1 και x_2 του σημείου από τα δύο μεγάφωνα **(1 μονάδα)** και υπολογίζουμε τη διαφορά δρόμου. Στη συνέχεια υπολογίζουμε το μήκος κύματος από τη σχέση $\lambda = \frac{|\Delta x|}{K}$, $K = 1, 2, 3, \ldots$ και την ταχύτητα του ήχου από τη σχέση $u = \lambda \cdot f$ **(1 μονάδα)** . Τέλος, υπολογίζουμε τη μέση τιμή των τιμών που βρήκαμε. **(1 μονάδα)**

ΘΕΜΑ 3ο: (Μονάδες 25)

Η αρχή της απροσδιοριστίας (ή, διαφορετικά, αρχή της αβεβαιότητας) είναι βασικό αξίωμα της Κβαντικής Μηχανικής που διατυπώθηκε για πρώτη φορά το 1927 από τον Βέρνερ Χάιζενμπεργκ (*Werner Heisenberg*, 1901 - 1976). Σύμφωνα με την αρχή της απροσδιοριστίας είναι αδύνατο να μετρηθεί ταυτόχρονα και με ακρίβεια, ούτε πρακτικά, ούτε και θεωρητικά η θέση και η ταχύτητα (ή η ορμή) ενός σωματιδίου. **Εάν μετράμε τη θέση ενός σωματιδίου με αβεβαιότητα Δx και ταυτόχρονα μετράμε την ορμή του με αβεβαιότητα Δp, τότε το γινόμενο των δύο μεγεθών δεν μπορεί να είναι μικρότερο από έναν αριθμό της τάξης του** $\hbar$ (όπου $\hbar = h/2\pi$, η σταθερά του Planck). Δηλαδή:

$$\Delta x \cdot \Delta p \geq \frac{\hbar}{2}$$



Χρησιμοποιώντας την παραπάνω σχέση στο όριο μιας απλής της προσέγγισης ($\Delta x \cdot \Delta p = \hbar$) και λαμβάνοντας υπόψη ότι στο άτομο του υδρογόνου, το μοναδικό ηλεκτρόνιο του έχει τη δυνατότητα να κινείται σε ένα χωρικό εύρος $\Delta x = \alpha$:

i) Να γράψετε μια έκφραση για την ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος πρωτονίου-ηλεκτρονίου.

(μονάδες 4)

Το πρωτόνιο δημιουργεί στο γύρω του χώρο ηλεκτρικό δυναμικό

$V(r) = \frac{e}{r}$ **(2 μονάδες)**

όπου e το φορτίο του πρωτονίου και r η τυχαία απόσταση από τον πυρήνα. Αφού το ηλεκτρόνιο βρίσκεται στο δυναμικό του πρωτονίου τότε υπάρχει ηλεκτρική δυναμική ενέργεια αλληλεπίδρασης

$E_{\delta\upsilon\nu} = (-e)V(r) = -\frac{e^2}{r}$ (1) **(2 μονάδες)**

ii) Θεωρώντας ότι η μέση τιμή της ενέργειας E είναι η μέση τιμή της χαμιλτωνιανής $\boldsymbol{H}$ του κβαντομηχανικού συστήματος πρωτονίου-ηλεκτρονίου του ατόμου του υδρογόνου (δηλαδή $E =< \boldsymbol{H} >$) με

$$\boldsymbol{H} = E_{\kappa\iota\nu} + E_{\delta\upsilon\nu}$$

όπου $E_{\kappa\iota\nu}$ η κινητική ενέργεια και $E_{\delta\upsilon\nu}$ η ηλεκτρική δυναμική ενέργεια του συστήματος, γράψτε μια έκφραση της μέσης ενέργειας E συναρτήσει του χωρικού εύρους κίνησης του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα του ατόμου α. (Υπόδειξη: σε αυτό το σύστημα η μέση τιμή της ορμής και της θέσης του ηλεκτρονίου ταυτίζονται με τις αβεβαιότητες τους, δηλαδή $< p >=< \Delta p >$ και $< x >=< \Delta x >$).

(μονάδες 5)

$$\text{Αφού } E =< \mathbf{H} > \text{ τότε } E = \langle \mathbf{H} \rangle = \langle E_{\kappa\iota\nu} \rangle + \langle E_{\delta\upsilon\nu} \rangle \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\mathrm{E} = \langle\frac{\mathrm{p}^2}{2\mathrm{m}}\rangle + \langle-\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{r}}\rangle \;\Rightarrow \mathrm{E} = \frac{\langle\mathrm{p}^2\rangle}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{e}^2}{\langle\mathrm{r}\rangle} \;\Rightarrow$$

$\mathrm{E} = \frac{<\Delta\mathrm{p}>^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{e}^2}{\langle\Delta\mathrm{r}\rangle}$ **(1 μονάδα)**

Για λόγους απλότητας το πρόβλημα έχει δοθεί στη μια διάσταση αλλά με απλή επέκταση και λόγο συμμετρίας του χώρου το ίδιο ισχύει και στις 3 διαστάσεις συνεπώς

$$\text{σε } 1-\mathrm{D}: \quad \mathrm{E} = \frac{<\Delta\mathrm{p}>^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{e}^2}{\langle\Delta\mathrm{x}\rangle} \;\Rightarrow$$

$\mathrm{E} = \frac{<\Delta\mathrm{p}>^2}{2\mathrm{m}} - \frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{a}}$ (2) **(2 μονάδες)**

Όμως σύμφωνα με την αρχή της αβεβαιότητας:

σε $1-\mathrm{D}$: $\Delta\mathrm{x}\cdot\Delta\mathrm{p} = \hbar \;\Rightarrow\; \Delta\mathrm{p} = \frac{\hbar}{\Delta\mathrm{x}}$ (3) **(1 μονάδα)**

Από (2) και (3) έχουμε:

$E = \frac{\hbar^2}{2m<\Delta x>^2} - \frac{e^2}{a} \;\Rightarrow E = \frac{\hbar^2}{2ma^2} - \frac{e^2}{a}$ (4) **(1 μονάδα)**

iii) Με δεδομένο ότι η σταθερότητα του ατόμου στη φύση εξασφαλίζεται στο σημείο ελαχιστοποίησης της μέσης ενέργειάς του, να υπολογίσετε την ελάχιστη τιμή της μέσης ενέργειας, καθώς και την τιμή της χωρικής μεταβλητής α στο σημείο αυτό.

(μονάδες 6)

$\frac{dE}{da} = 0 \;\Rightarrow a = a_0 = \frac{\hbar^2}{me^2}$ (5) **(3 μονάδες)**

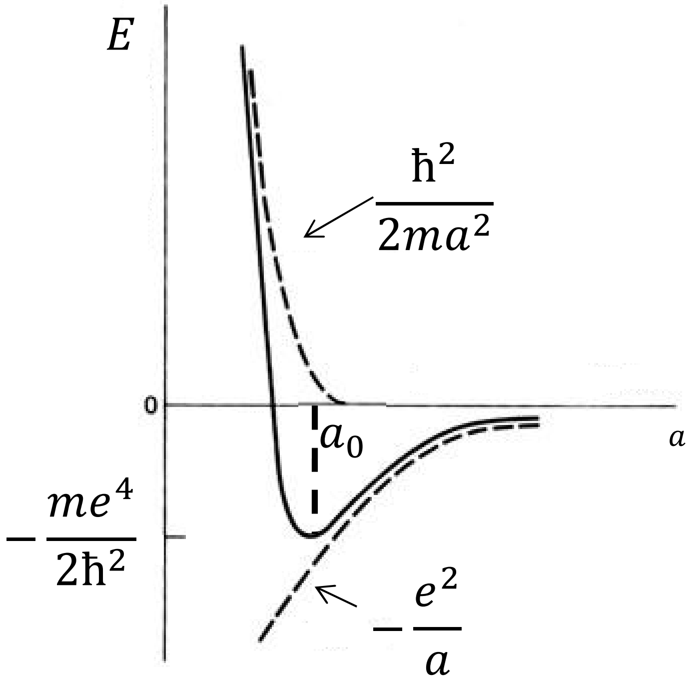
Από (4) και (5) βρίσκουμε για την ελάχιστη ενέργεια:

$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2} < 0$ (6) **(3 μονάδες)**

iv) Να κατασκευάσετε (ποιοτικά) κατάλληλη γραφική παράσταση των δύο όρων της μέσης ενέργειας E (κινητικής και δυναμικής) σε κοινή γραφική παράσταση καθώς και της μέσης ενέργειας E συναρτήσει του εύρους χωρικής κίνησης του ηλεκτρονίου γύρω από τον πυρήνα α.

(μονάδες 6)

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση της κινητικής, **(2 μονάδες)** της δυναμικής **(2 μονάδες)** και της ολικής ενέργειας **(2 μονάδες)** του ατόμου του υδρογόνου.



v) Να σχολιάσετε την άποψη ότι **το άτομο του υδρογόνου (όπως και κάθε άλλο άτομο) αποτελείται στο μεγαλύτερο ποσοστό του από κενό χώρο**.
Αν δεν ίσχυε η αρχή της αβεβαιότητας ποια μεγάλη αλλαγή θα παρατηρούσαμε στο γύρω μας κόσμο καθώς και σε εμάς τους ίδιους;

(μονάδες 4)

Όπως φαίνεται από το παραπάνω θέμα, το άτομο του υδρογόνου (και γενικότερα οποιοδήποτε άτομο) δεν μπορεί να γίνει μικρότερο από το ότι επιτρέπει η αρχή της αβεβαιότητας μιας και τότε μειώνεται μεν η δυναμική ενέργεια αλλά αυξάνεται υπέρμετρα η κινητική του ενέργεια. Επίσης, δεν μπορεί να γίνει ούτε μεγαλύτερο γιατί τότε μειώνεται μεν η κινητική ενέργεια αλλά αυξάνεται υπερβολικά η δυναμική του ενέργεια. Η ελάχιστη ενέργεια εκφράζει και το σημείο σταθερότητας του ατόμου και αυτό επιτυγχάνεται (για το άτομο του υδρογόνου) στην ακτίνα του Bohr a_0. **(2 μονάδες)**

Αν λοιπόν δεν ίσχυε η αρχή της αβεβαιότητας τότε όλα θα συμπυκνώνονταν σε τέτοιο βαθμό που η πυκνότητα της ύλης θα αυξανόταν τρομακτικά και όλη η ύλη θα είχε τρομακτικά μικρές διαστάσεις ακόμα και εμείς οι ίδιοι θα ήμασταν τόσο μικροσκοπικοί που πρακτικά δεν θα είχαμε ουσιαστικές διαστάσεις. **(2 μονάδες)**

ΘΕΜΑ 4^o: (Μονάδες 15)

Α. α) Να διατυπώσετε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει για να εκτελεί ένα σώμα απλή αρμονική ταλάντωση.

(μονάδες 2)

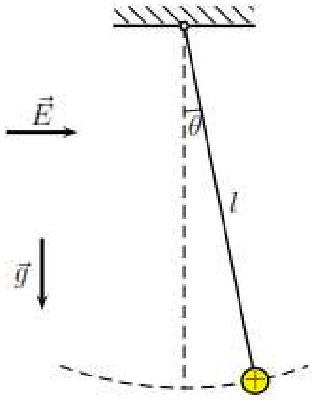
Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση όταν σε αυτό ασκείται δύναμη επαναφοράς, $\vec{F}$ δηλαδή, μια δύναμη ανάλογη της απομάκρυνσης του σώματος από τη θέση ισορροπίας με φορά αντίθετη της απομάκρυνσης $\vec{x}$.

$$\vec{F} = -D \cdot \vec{x},$$

όπου $D = m\omega^2$, $\omega = 2\pi f$ και f είναι η συχνότητα του ταλαντωτή.

(2 μονάδες)

β) Στο άκρο νήματος μήκους l κρεμιέται σφαιρίδιο μάζας m, που φέρει θετικό ηλεκτρικό φορτίο q. Το άλλο άκρο του νήματος είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το σφαιρίδιο βρίσκεται σε κατακόρυφο βαρυτικό πεδίο έντασης $\vec{g}$ και οριζόντιο ηλεκτρικό πεδίο έντασης $\vec{E}$. Στη θέση ισορροπίας του σφαιριδίου το νήμα σχηματίζει γωνία θ με την κατακόρυφη διεύθυνση, όπως φαίνεται στο σχήμα.

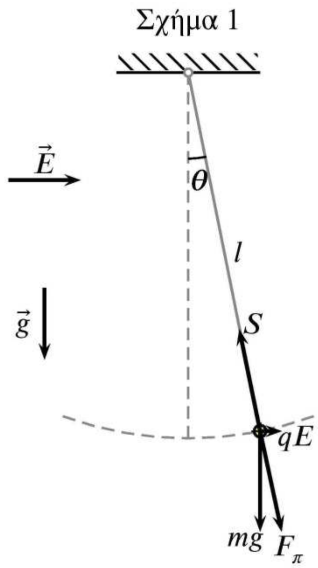


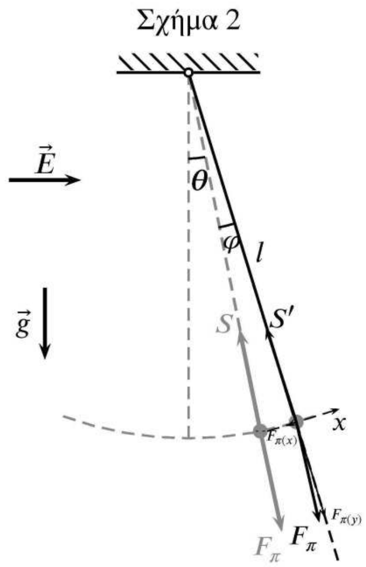
Το σφαιρίδιο εκτρέπεται λίγο από τη θέση ισορροπίας του και αφήνεται ελεύθερο.

i. Να δείξετε ότι το σφαιρίδιο εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

(μονάδες 5)

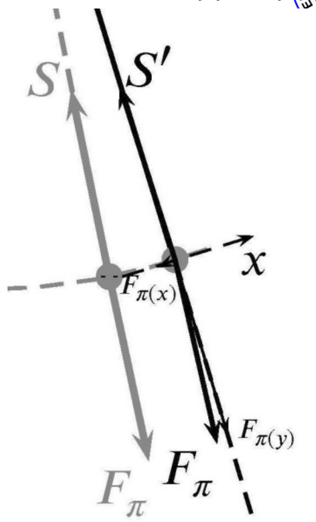
Στο σχήμα 1 φαίνεται το σφαιρίδιο στη θέση ισορροπίας του. Η συνισταμένη $\vec{F}_\pi$της βαρυτικής και της ηλεκτρικής δύναμης στο σφαιρίδιο είναι αντίθετη με την τάση του νήματος





και το μέτρο της ισούται με $F_\pi = \sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}$ **(1 μονάδα)**. Η δύναμη αυτή (μέτρο και διεύθυνση) δεν αλλάζει κατά τη διάρκεια της ταλάντωσης. Στο σχήμα 2 το σφαιρίδιο έχει απομακρυνθεί έτσι ώστε το νήμα να σχηματίζει μικρή γωνία φ με την προηγούμενη θέση του. Την ίδια γωνία φ σχηματίζει και η $\vec{F}_\pi$ με τη διεύθυνση του νήματος. Αναλύουμε την $\vec{F}_\pi$ σε δύο κάθετες συνιστώσες $\vec{F}_{\pi(x)}$ και $\vec{F}_{\pi(y)}$, όπως φαίνεται στο σχήμα 3 **(1 μονάδα)**. Είναι φανερό ότι $F_{\pi(x)} = -F_\pi \cdot$ ημφ. Όμως, για μικρές γωνίες $\eta\mu\varphi \approx \varphi$ και $\varphi \approx x/l$ **(1 μονάδα)**. Άρα μπορούμε να γράψουμε τη σχέση $F_{\pi(x)} = -F_\pi \cdot \frac{x}{l}$

Σχήμα 3



(1 μονάδα)

Οι δυνάμεις $\vec{F}_{\pi(y)}$ και $\vec{S'}$ είναι αντίθετες, αφού το σφαιρίδιο ισορροπεί σε αυτή τη διεύθυνση **(1 μονάδα)**. Επομένως, έχουμε δείξει ότι στο σφαιρίδιο ασκείται δύναμη της μορφής $F = -D \cdot x$, με $D = \frac{F_\pi}{l}$. Άρα το σφαιρίδιο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

ii. Να αποδείξετε τη σχέση που δίνει τη συχνότητα της απλής αρμονικής ταλάντωσης που εκτελεί το σφαιρίδιο. Η σχέση να δοθεί σε συνάρτηση με τα μεγέθη m, l, q, g και E.

(μονάδες 4)

Συνδυάζοντας τις σχέσεις $D = m\omega^2$ και $D = \frac{F_\pi}{l}$ **(1 μονάδα)** προκύπτει ότι $\omega = \sqrt{\frac{F_\pi}{ml}}$. **(1 μονάδα)**

Άρα

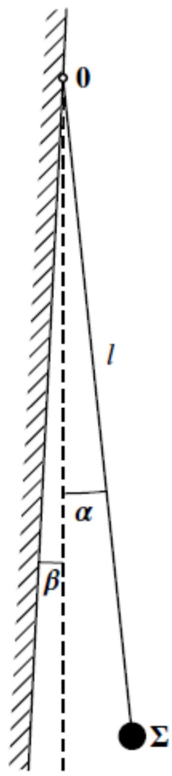
$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\sqrt{(mg)^2 + (qE)^2}}{ml}}$$

(2 μονάδες)

Β. Στο άκρο νήματος μήκους l κρεμιέται σφαιρίδιο Σ. Το άλλο άκρο του νήματος στερεώνεται σε ακλόνητο σημείο Ο τοίχου, ο οποίος σχηματίζει μικρή γωνία β με την κατακόρυφο (διακεκομμένη γραμμή στο σχήμα). Στη συνέχεια το νήμα με το σφαιρίδιο εκτρέπονται κατά μικρή γωνία $\alpha > \beta$ και αφήνονται. Θεωρώντας την κρούση της μπάλας με τον τοίχο απόλυτα ελαστική και τον χρόνο κρούσης αμελητέο να δείξετε ότι η περίοδος της ταλάντωσης του σφαιριδίου δίνεται από τη σχέση

$$T = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\pi + 2 \cdot \text{Τοξημ}\frac{\beta}{\alpha}\right)$$

(μονάδες 4)



Η περίοδος της ταλάντωσης του σφαιριδίου είναι ίση με

$$T' = 2 \cdot \frac{T}{4} + 2 \cdot t_\beta,$$

(1 μονάδα)

Όπου $T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ είναι η περίοδος του απλού εκκρεμούς και t_β είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σφαιρίδιο για να πάει από τη θέση ισορροπίας στο σημείο πρόσκρουσης στον τοίχο. Αφού η κρούση είναι ελαστική το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου μετά την κρούση θα είναι το ίδιο με το μέτρο της ταχύτητας του σφαιριδίου πριν την κρούση **(1 μονάδα)**. Άρα και ο χρόνος για να επιστρέψει στη θέση ισορροπίας θα είναι πάλι t_β. Για να υπολογίσουμε αυτό το χρόνο χρησιμοποιούμε την εξίσωση της ταλάντωσης $x = x_0 \text{ημ}\omega t$. Όταν το σφαιρίδιο συγκρούεται με τον τοίχο η απομάκρυνσή του από τη θέση ισορροπίας είναι $x = l \cdot \beta$, (β σε ακτίνια). Αντίστοιχα, για την ακραία θέση $x_0 = l \cdot \alpha$ **(1 μονάδα)**. Άρα

$$\beta = \alpha \cdot \text{ημ}\omega t_\beta \;\Rightarrow \omega t_\beta = \text{Τοξημ}\frac{\beta}{\alpha} \;\Rightarrow\; t_\beta = \frac{T}{2\pi}\text{Τοξημ}\frac{\beta}{\alpha}$$

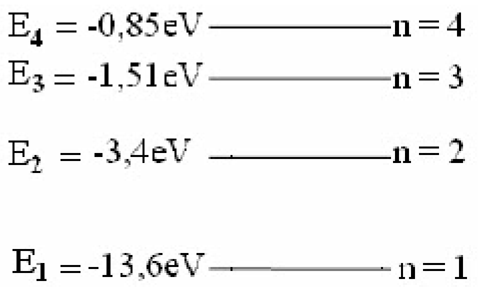
Επομένως

$$T' = \frac{1}{2} \cdot 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} + 2 \cdot \sqrt{\frac{l}{g}}\text{Τοξημ}\frac{\beta}{\alpha} = \sqrt{\frac{l}{g}} \cdot \left(\pi + 2 \cdot \text{Τοξημ}\frac{\beta}{\alpha}\right),$$

(1 μονάδα)

ΘΕΜΑ 5ο: (Μονάδες 10)

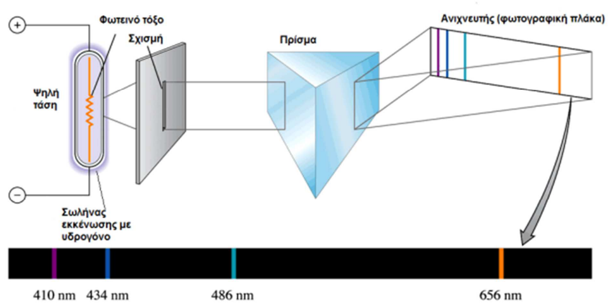
Στο σχήμα φαίνονται οι τέσσερις πρώτες ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου. Διεγερμένο άτομο υδρογόνου βρίσκεται στην κατάσταση που αντιστοιχεί στον κβαντικό αριθμό $n = 3$.



α) Ποια ελάχιστη ενέργεια απαιτείται για να ιονιστεί το διεγερμένο αυτό άτομο του υδρογόνου; **(μονάδες 2)**

Αφού το ηλεκτρόνιο του ατόμου βρίσκεται στη διεγερμένη ενεργειακή στάθμη n=3 θα χρειαστεί ενέργεια τουλάχιστον 1,51 eV για να ιονιστεί, δηλαδή να μεταβεί στο άπειρο εκεί όπου πρακτικά η έλξη του πυρήνα θεωρείται ασήμαντη. **(2 μονάδες)**

β) Ποιο είναι το πλήθος των δυνατών γραμμών του φάσματος εκπομπής του ατόμου αυτού όταν πραγματοποιηθεί η μέθοδος της φασματοσκοπίας (βλέπε στο διπλανό σχήμα ένα τυπικό φάσμα εκπομπής του ατόμου του υδρογόνου); **(μονάδες 3)**

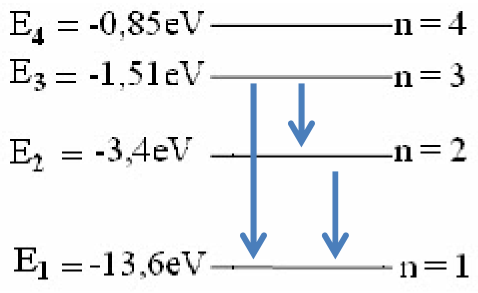


Αφού το ηλεκτρόνιο του ατόμου του υδρογόνου βρίσκεται στην ενεργειακή στάθμη με κύριο κβαντικό αριθμό n=3, οι πιθανές αποδιεγέρσεις θα είναι από την n=3 στην n=1 απευθείας ή από την n=3 στην n=2 και στη συνέχεια στη n=1. **(1 μονάδα)** Συνεπώς, παρατηρούμε ότι οι ενεργειακές διαφορές (άρα και η εκπομπή των αντίστοιχων φωτονίων) αντιστοιχούν σε τρείς διαφορετικές ενέργειες άρα και σε τρία διαφορετικά μήκη κύματος πάνω στο αντίστοιχο φάσμα εκπομπής του ατόμου. **(1 μονάδα)** Συνεπώς το πλήθος των αντίστοιχων γραμμών στο φάσμα θα είναι τρείς. **(1 μονάδα)**

γ) Να μεταφέρετε στο τετράδιο σας το διάγραμμα των ενεργειακών σταθμών και να σχεδιάσετε όλες τις δυνατές μεταβάσεις που δημιουργούν το φάσμα εκπομπής του υδρογόνου, διεγερμένου αρχικά στην κατάσταση με $n = 3$.

(μονάδες 3)

Στο διπλανό σχήμα σχεδιάζουμε τις δυνατές αποδιεγέρσεις του ηλεκτρονίου από την ενεργειακή στάθμη n=3 του ατόμου του υδρογόνου στη θεμελιώδη του κατάσταση n=1. **(3 μονάδες)**



δ) Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να απορροφηθεί από αυτό το διεγερμένο άτομο;

(μονάδες 2)

Η ελάχιστη ενέργεια που μπορεί να απορροφηθεί πρέπει να αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενεργειακή διαφορά μεταξύ των ενεργειακών σταθμών του. **(1 μονάδα)** Αυτή η διαφορά αντιστοιχεί σε:

$$\mathrm{E}_4 - \mathrm{E}_3 = -0.85 - (-1.51) = 0{,}66 \text{ eV}$$ **(1 μονάδα)**

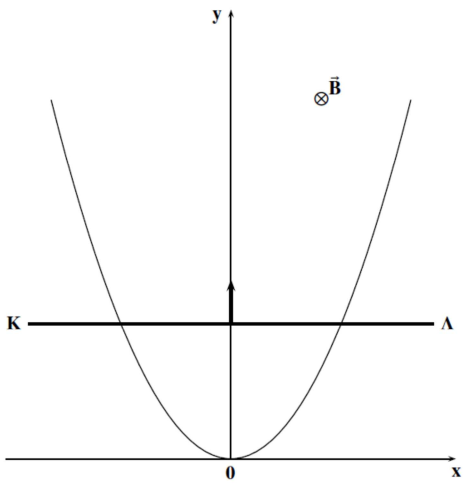
ΘΕΜΑ 6ο: (Μονάδες 15)

α) Να διατυπώσετε το νόμο του Faraday για την ηλεκτρομαγνητική επαγωγή.

(μονάδες 3)

Η επαγόμενη ηλεκτρεγερτική δύναμη σε ένα πλαίσιο είναι ανάλογη του ρυθμού μεταβολής της μαγνητικής ροής που διαρρέει το πλαίσιο,

$$E_{\varepsilon\pi} = -N\frac{d\Phi}{dt}.$$



β) Ένας αγωγός που έχει μορφή παραβολής $y = kx^2$ βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο μαγνητικής επαγωγής $\vec{B}$. Το μαγνητικό πεδίο είναι κάθετο στο επίπεδο του παραβολικού αγωγού. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ο αγωγός $ΚΛ$ αρχίζει να κινείται από την κορυφή της παραβολής κατά μήκος του άξονα $0y$, έτσι ώστε αυτός να παραμένει συνεχώς κάθετος στον άξονα $0y$ και σε επαφή με τα δύο σκέλη της παραβολής.

Να υπολογίσετε σαν συνάρτηση του y την ηλεκτρεγερτική δύναμη από επαγωγή που δημιουργείται στο βρόχο που σχηματίζουν οι δύο αγωγοί, για τις πιο κάτω περιπτώσεις:

i. Ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή ταχύτητα.

(μονάδες 4)

Αφού η μαγνητική επαγωγή είναι σταθερή και κάθετη στο επίπεδο της παραβολής, ο νόμος του Faraday μας δίνει:

$$E_{\varepsilon\pi} = -\frac{d(BS)}{dt} = -B\frac{dS}{dt}$$

(1 μονάδα)

Το εμβαδόν του πλαισίου δίνεται από τη σχέση $S = 2\int_0^y \sqrt{\frac{y}{k}}dy = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{y^3}{k}}$ **(1 μονάδα)**.

Άρα

$$E_{\varepsilon\pi} = -2B\sqrt{\frac{y}{k}}\cdot\frac{dy}{dt} = -2Bu\sqrt{\frac{y}{k}}$$

(1 μονάδα)

Όπου $u = \frac{dy}{dt}$ είναι η ταχύτητα του αγωγού ΚΛ **(1 μονάδα)**.

ii. Ο αγωγός ΚΛ κινείται με σταθερή επιτάχυνση a και τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ταχύτητά του ήταν μηδέν.

(μονάδες 4)

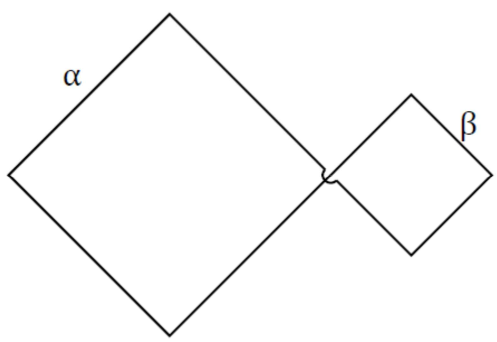
Η σχέση για την επαγωγική ηλεκτρεγερτική δύναμη στο βρόχο, στην οποία καταλήξαμε στο προηγούμενο σημείο, ισχύει και εδώ **(1 μονάδα)**. Η ταχύτητα u για την ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση δίνεται από τη σχέση $u = \sqrt{2ay}$ **(1 μονάδα)**, όπου a είναι η επιτάχυνση του αγωγού ΚΛ.

Έτσι η επαγωγική τάση θα είναι ίση με

$$E_{\varepsilon\pi} = -By\sqrt{\frac{8a}{k}}$$

(2 μονάδες)

γ) Ένα επίπεδο πλαίσιο έχει τη μορφή δύο τετραγώνων με πλευρές $\alpha = 20\text{cm}$ και $\beta = 10\text{cm}$ και βρίσκεται σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, κάθετο στο επίπεδο του πλαισίου. Η μαγνητική επαγωγή του πεδίου μεταβάλλεται σύμφωνα με τη σχέση $B = B_0\text{ημ}\omega t$, όπου $B_0 = 10\text{ mT}$ και $\omega = 100\text{ rad/s}$. Να υπολογίσετε το μέγιστο επαγωγικό ρεύμα που διαρρέει το πλαίσιο, αν η αντίσταση ανά μονάδα μήκους του αγωγού του πλαισίου είναι $r = 50\text{ m}\Omega/\text{m}$.



(μονάδες 4)

Οι επαγωγικές τάσεις E_α και E_β που θα δημιουργηθούν στα αντίστοιχα τμήματα του πλαισίου θα έχουν αντίθετη πολικότητα **(1 μονάδα)** και, άρα, η συνολική επαγωγική τάση στο πλαίσιο θα είναι

$$E = E_\alpha - E_\beta = (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \frac{dB}{dt} \Rightarrow E = (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \omega B_0 \cdot \text{συν}\omega t \, .$$

(1 μονάδα)

Επομένως το πλάτος της επαγωγικής τάσης είναι $E_0 = (\alpha^2 - \beta^2) \cdot \omega B_0$. Το πλάτος του επαγωγικού ρεύματος δίνεται από τη σχέση $I_0 = E_0/R$, όπου $R = 4(\alpha + \beta)r$ είναι η συνολική αντίσταση του πλαισίου. Άρα

$$I_0 = \frac{\omega B_0(\alpha - \beta)}{4r}.$$

(1 μονάδα)

Αντικαθιστώντας τις αριθμητικές τιμές βρίσκουμε ότι

$$I_0 = 0{,}5\text{A}.$$

(1 μονάδα)

Τέλος