ΕΝΩΣΗ ΚΥΠΡΙΩΝ ΦΥΣΙΚΩΝ

29 Η ΠΑΓΚΥΠΡΙΑ ΟΛΥΜΠΙΑΔΑ ΦΥΣΙΚΗΣ

Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ (Α΄ Φάση)

Κυριακή, 25 Ιανουαρίου 2015

Ώρα: 10:00 - 13:00

Οδηγίες:

1) ***Το δοκίμιο αποτελείται από έξι (6) σελίδες και πέντε (5) θέματα.***
2) ***Να απαντήσετε σε όλα τα θέματα του δοκιμίου.***
3) ***Κάθε θέμα βαθμολογείται με 20 μονάδες. Σε κάθε θέμα οι μονάδες κάθε ερωτήματος φαίνονται στο τέλος του ερωτήματος.***
4) ***Στο τετράδιο απαντήσεων να αναγράφεται ξεκάθαρα ο αριθμός του θέματος και του ερωτήματος που απαντάτε.***
5) ***Επιτρέπεται η χρήση μόνο μη προγραμματιζόμενης υπολογιστικής μηχανής.***
6) ***Δεν επιτρέπεται η χρήση διορθωτικού υγρού.***
7) ***Επιτρέπεται η χρήση ΜΟΝΟ μπλε ή μαύρου μελανιού. (Οι γραφικές παραστάσεις μπορούν να γίνουν και με μολύβι).***
8) ***Τα σχήματα των θεμάτων δεν είναι υπό κλίμακα.***
9) ***Δίνεται:*** $g = 9,81\ \mathrm{m/s^2}$.

ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΕΣ ΛΥΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1ο

α. Να διατυπώσετε το γενικευμένο 2ο νόμο του Νεύτωνα γράφοντας και την κατάλληλη σχέση.

(μονάδες 2)

Ο ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός σώματος (ή συστήματος σωμάτων) ισούται με την συνισταμένη των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σώμα (ή στο σύστημα). **(μ. 1)**

$\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt}$ **(μ. 1)**

β. Να εξαγάγετε από τη σχέση που γράψατε τη σχέση $\Sigma\vec{F} = m \cdot \vec{a}$.

(μονάδες 2)

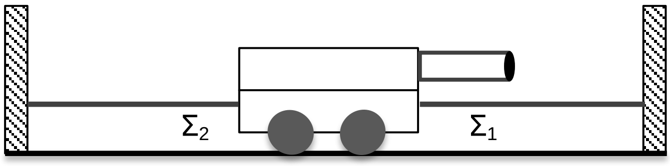
Αν η μάζα είναι σταθερή **(μ. 1)**: $\Sigma\vec{F} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = \frac{d(m\vec{u})}{dt} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = m\frac{d\vec{u}}{dt} \Rightarrow \Sigma\vec{F} = m\vec{a}$ **(μ. 1)**

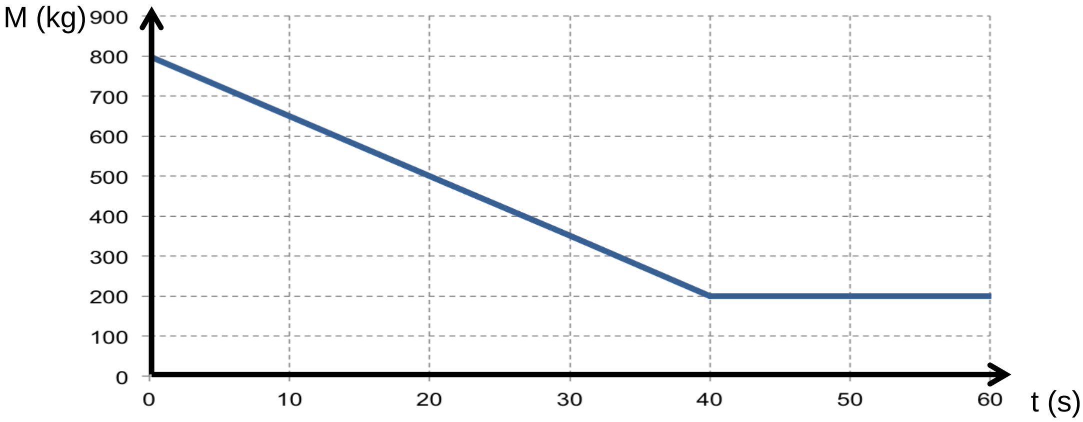
γ. Ποια από τις σχέσεις των δύο προηγούμενων ερωτημάτων α και β θα χρησιμοποιούσατε για να μελετήσετε την κίνηση ενός πυραύλου κατά την εκτόξευσή του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(μονάδες 2)

Τη σχέση του ερωτήματος α **(μ. 1)**, αφού η μάζα του πυραύλου δεν είναι σταθερή **(μ. 1)**.

δ. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται ένα ρομπότ – πυροσβεστήρας το οποίο είναι ακίνητο και στερεωμένο με δύο λεπτά μη εκτατά συρματόσχοινα που έχουν τάση μηδέν. Όταν ο πυροσβεστήρας ξεκινά να εκσφενδονίζει νερό στην κατεύθυνση του συρματόσχοινου $Σ_1$, η μάζα του οχήματος μεταβάλλεται σύμφωνα με την γραφική παράσταση που ακολουθεί. Τη χρονική στιγμή $t = 40\ \mathrm{s}$ το ντεπόζιτο αδειάζει.





i. Να εξηγήσετε σε ποιό από τα δύο συρματόσχοινα ($Σ_1$ ή $Σ_2$) θα εμφανιστεί τάση όταν ο πυροσβεστήρας αρχίσει να εκσφενδονίζει νερό. Μεταξύ του δαπέδου και των τροχών του οχήματος δεν υπάρχει τριβή.

(μονάδες 3)

Θα εμφανιστεί τάση στο $Σ_1$ **(μ. 1)**. Αφού το αμαξάκι και το νερό είναι απομονωμένο σύστημα **(μ. 1)**, όταν το νερό εκτοξεύεται προς τα δεξιά αποκτώντας ορμή στην κατεύθυνση αυτή τότε το αμαξάκι τείνει να κινηθεί με ίσου μέτρου ορμή προς την αντίθετη κατεύθυνση **(μ. 1)** και έτσι αναπτύσσεται τάση στο συρματόσχοινο $Σ_1$ για να το συγκρατήσει.

ii. Το νερό εκσφενδονίζεται με σταθερή ταχύτητα $\upsilon = 15\ \mathrm{m/s}$. Να υπολογίσετε την τάση που αναπτύσσεται στο συρματόσχοινο.

(μονάδες 5)

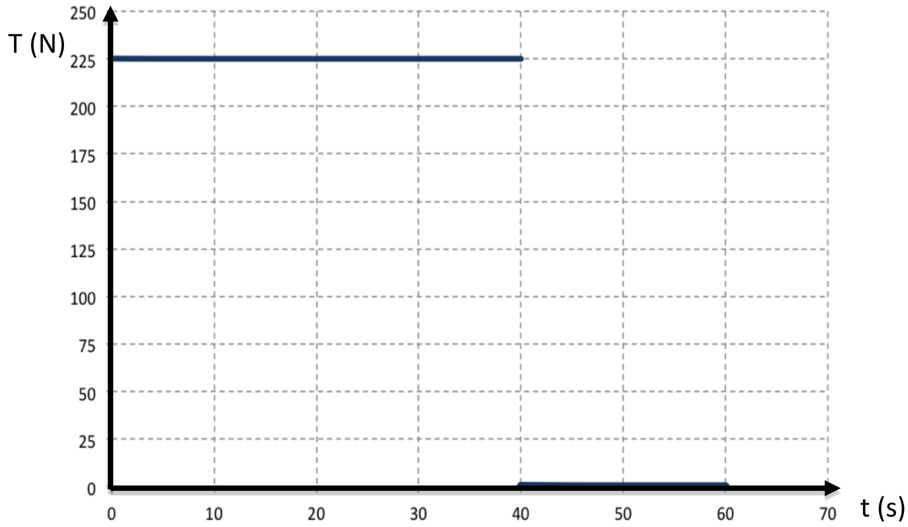
$\frac{dm}{dt} = \frac{200-800}{40-0} = -15\ \mathrm{kg/s}$ **(μ. 2)**

$F = \frac{dP}{dt} = \frac{dm}{dt}u = -15.15 = -225N \Rightarrow F = -225\ \mathrm{N}$ στο νερό **(μ. 2)**

$F = 225\ \mathrm{N}$ στο συρματόσχοινο. **(μ. 1)**

iii. Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της τάσης στο συρματόσχοινο σε σχέση με τον χρόνο για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 60\ \mathrm{s}$.

(μονάδες 4)



iv. Η πυκνότητα του νερού που υπήρχε στο πυροσβεστικό όχημα είναι $d = 1000\ \mathrm{kg/m^3}$. Να υπολογίσετε το εμβαδό διατομής της φλέβας του νερού.

(μονάδες 2)

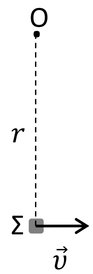
$d = \frac{m}{V} \Rightarrow V = \frac{m}{d} \Rightarrow S \cdot u \cdot t = \frac{m}{1000}$ **(μ. 1)**

$S \cdot 15 \cdot 40 = \frac{600}{1000} \Rightarrow S = 0{,}001\ \mathrm{m^2}$ **(μ. 1)**

ΘΕΜΑ 2^o

α. Υλικό σημείο Σ έχει μάζα m και κινείται με ταχύτητα $\vec{\upsilon}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να δώσετε τον ορισμό της στροφορμής του υλικού σημείου ως προς το σημείο Ο.

(μονάδες 3)



Η στροφορμή υλικού σημείου ως προς σημείο Ο είναι το διανυσματικό μέγεθος με μέτρο το γινόμενο $m \cdot \upsilon \cdot r$ **(μ. 1)**, σημείο εφαρμογής το σημείο Ο **(μ. 1)** και διεύθυνση την κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το διάνυσμα της ταχύτητας και το σημείο Ο με φορά την κατεύθυνση προς την οποία προχωρεί ένας δεξιόστροφος κοχλίας όταν περιστρέφεται όπως φαίνεται να περιστρέφεται το σημείο Σ ως προς το σημείο Ο **(μ. 1)**.

β. Να γράψετε τον τύπο υπολογισμού της κινητικής ενέργειας στερεού σώματος που εκτελεί περιστροφική κίνηση εξηγώντας όλα τα σύμβολα των φυσικών μεγεθών στον τύπο.

(μονάδες 2)

$E_\kappa = \frac{1}{2} I \cdot \omega^2$ **(μ. 1)**

όπου I είναι η ροπή αδράνειας του σώματος και ω είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του σώματος **(μ. 1)**

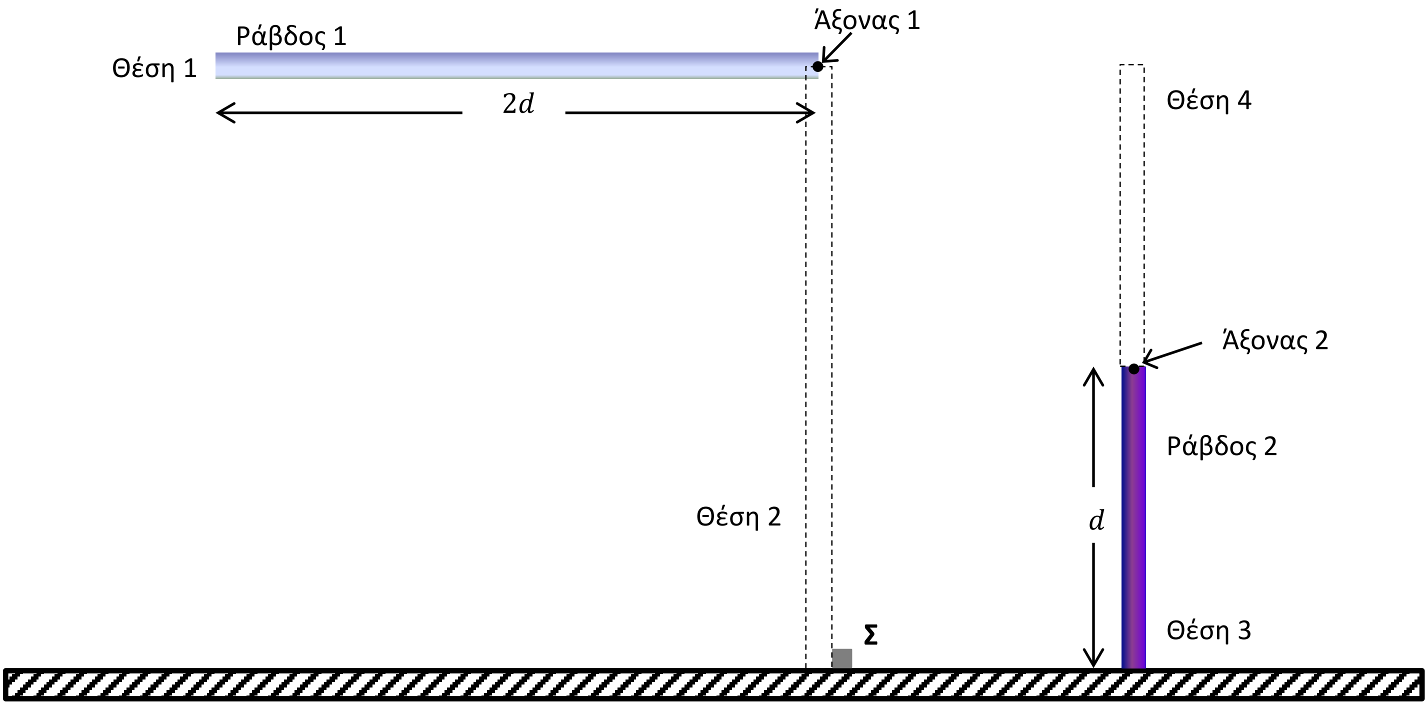
γ. Να διατυπώσετε το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής.

(μονάδες 1)

Αν η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που ασκούνται σε ένα σύστημα σωμάτων είναι μηδέν τότε η στροφορμή του συστήματος διατηρείται σταθερή **(μ. 1)**

δ. Στο σχήμα που ακολουθεί η ομογενής ράβδος 1 έχει μάζα m_1 , μήκος $2d$ και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα 1, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της. Παρόμοια, η ομογενής ράβδος 2 έχει μάζα m_2 , μήκος d και μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα γύρω από τον άξονα 2, ο οποίος διέρχεται από το άκρο της.

Κρατάμε τη ράβδο 1 σε οριζόντια θέση (θέση 1) και στη συνέχεια την αφήνουμε ελεύθερη. Όταν η ράβδος 1 φθάνει σε κατακόρυφη θέση (θέση 2) συγκρούεται ελαστικά με το σώμα Σ αμελητέων διαστάσεων και μάζας m_Σ το οποίο βρίσκεται ακίνητο στο οριζόντιο επίπεδο. Αμέσως μετά τη σύγκρουση η ράβδος 1 ακινητοποιείται στη θέση 2.



i. Γνωρίζοντας ότι η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της δίνεται από τη σχέση $I = \frac{1}{3} m l^2$ (m – μάζα της ράβδου, l - μήκος της ράβδου) να δείξετε ότι για να ακινητοποιηθεί η ράβδος 1 θα πρέπει η μάζα του σώματος Σ να είναι ίση με $m_\Sigma = \frac{1}{3} m_1$.

(μονάδες 5)

Για την κρούση στη θέση 2 εφαρμόζουμε τα θεωρήματα διατήρησης της στροφορμής και της ενέργειας.

Από το θεώρημα διατήρησης της στροφορμής θα έχουμε

$$I_1 \cdot \omega_1 = m_\Sigma \cdot \upsilon_\Sigma \cdot 2d \quad \textbf{(μ. 1)}$$

όπου ω_1 είναι η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου 1 μόλις πριν την κρούση και υ_Σ είναι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση.

Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι

$$\upsilon_\Sigma = \frac{2dm_1}{3m_\Sigma}\omega_1 \qquad (1)$$

(μ. 1)

Από το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας έχουμε

$$\frac{1}{2}I_1\omega_1^2 = \frac{1}{2}m_\Sigma\upsilon_\Sigma^2$$

(μ. 1)

Αντικαθιστώντας σε αυτή τη σχέση την ταχύτητα υ_Σ από τη σχέση (1) **(μ. 1)** βρίσκουμε ότι

$$m_\Sigma = \frac{1}{3}m_1 \qquad (2)$$

(μ. 1)

ii. Να δείξετε ότι η ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση με τη ράβδο 1 θα είναι $\upsilon = \sqrt{6gd}$.

(μονάδες 2)

Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις 1 και 2 της ράβδου 1 και θεωρώντας ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο στο οποίο βρίσκεται το κέντρο μάζας της ράβδου στη θέση 2, παίρνουμε τη σχέση

$$m_1gd = \tfrac{1}{2}I_1\omega_1^2\,,$$

από την οποία βρίσκουμε ότι

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{2d}}$$

(μ. 1)

Αντικαθιστώντας με τη βοήθεια αυτής της σχέσης το ω_1στην (1) και λαμβάνοντας υπ' όψιν τη (2) βρίσκουμε ότι

$$\upsilon_\Sigma = \sqrt{6gd}$$

(μ. 1)

Μετά την κρούση το σώμα Σ κινείται χωρίς τριβές στο οριζόντιο επίπεδο και συγκρούεται, και πάλι ελαστικά, με τη ράβδο 2, η οποία ισορροπεί στη θέση 3. Μετά την κρούση η ράβδος 2 μόλις που καταφέρνει να φθάσει στη θέση 4.

iii. Να υπολογίσετε τη μάζα της ράβδου 2, m_2, σε σχέση με τη μάζα m_1 της ράβδου 1.

(μονάδες 4)

Έστω ότι αμέσως μετά την κρούση στη θέση 3 η ράβδος 2 θα έχει γωνιακή ταχύτητα ω_2και το σώμα Σ θα έχει ταχύτητα υ'_Σ. Εφαρμόζοντας και σε αυτή την περίπτωση τα θεωρήματα διατήρησης της στροφορμής και της ενέργειας θα έχουμε:

$$m_\Sigma d(\upsilon_\Sigma - \upsilon'_\Sigma) = I_2\omega_2 \qquad (3)$$

$$m_\Sigma \left(\upsilon_\Sigma{}^2 - \upsilon'_\Sigma{}^2\right) = I_2\omega_2{}^2 \qquad (4)$$

(μ. 2)

Εφαρμόζοντας το θεώρημα διατήρησης της ενέργειας για τη ράβδο στις θέσεις 3 και 4 βρίσκουμε ότι

$$\omega_2 = \sqrt{6g/d} \qquad (5)$$

(μ. 1)

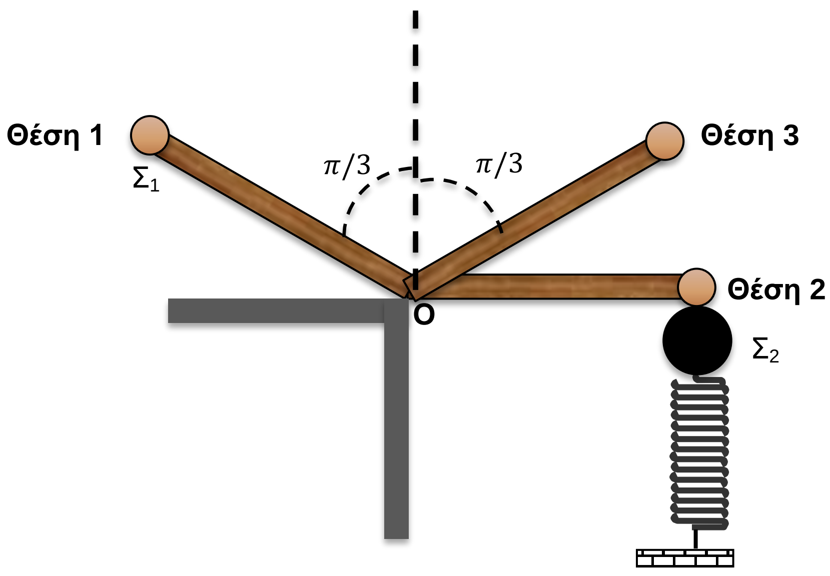
Από τις σχέσεις (3) – (5) και σε συνδυασμό με τη σχέση (2) προκύπτει ότι $m_2 = m_1$ **(μ. 1)**.

iv. Να υπολογίσετε την ταχύτητα του σώματος Σ αμέσως μετά την κρούση με τη ράβδο 2. **(μονάδες 3)**

Από τη σχέση (3) και λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι $\upsilon_\Sigma = \sqrt{6gd}$ (2 μονάδες) βρίσκουμε ότι $\upsilon'_\Sigma = 0$ **(μ. 1)**.

ΘΕΜΑ 3ο

Η ομογενής ράβδος μήκους $L = 2$ m και μάζας $m = 6$ kg μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που είναι κάθετος στη ράβδο και ο οποίος περνά από το ένα άκρο της Ο. Στο άλλο άκρο της ράβδου είναι προσκολλημένο σώμα Σ_1, αμελητέων διαστάσεων, με μάζα $m_1 = 2\ kg$.



Αρχικά η ράβδος βρίσκεται στην θέση 1 σχηματίζοντας γωνία $\pi/3$ με την κατακόρυφο. Στη θέση αυτή το σώμα Σ_1 έχει γραμμική ταχύτητα $\upsilon = 2\ m/s$. Όταν το σύστημα (ράβδος, σώμα Σ_1) φτάσει στην οριζόντια θέση 2 συγκρούεται με το σώμα Σ_2, μάζας

$m_2 = 38{,}4\ \mathrm{kg}$ και γυρνά προς τα πίσω φθάνοντας στην ακραία θέση 3, σχηματίζοντας και πάλι γωνία $\pi/3$ με την κατακόρυφο. Στη συνέχεια η ράβδος συγκρατείται στη θέση αυτή. Το σώμα Σ_2 είναι στερεωμένο στην άκρη κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K = 960\ \mathrm{N/m}$. Τη στιγμή της σύγκρουσης το σώμα Σ_2 έχει εκτελέσει το ¼ της πρώτης του ταλάντωσης και βρίσκεται στην θέση ισορροπίας του κινούμενο προς τα πάνω με πλάτος ταλάντωσης $0{,}05\mathrm{m}$.
Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το Ο: $I_{ράβδου} = \frac{1}{3}ML^2$.

α. Να υπολογίσετε:

i. τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος (ράβδος, σώμα Σ_1) στην θέση 2 πριν την κρούση,

(μονάδες 4)

$I_\Sigma = m_1L^2 = 8\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ $\quad I_\rho = \frac{mL^2}{3} = 8\ \mathrm{kg\cdot m^2}$ $\quad I_{\Sigma\rho} = I_\Sigma + I_\rho = 16\ \mathrm{kg\cdot m^2}$

$EM_2 = EM_1$

$EK_{\Sigma,\rho2} + E\Delta_{\rho2} + E\Delta_{\Sigma2} = EK_{\Sigma1} + EK_{\rho1} + E\Delta_{\Sigma1} + E\Delta_{\rho1}$ **(μ. 1)**

$\frac{1}{2}(I_\rho + I_\Sigma){\omega_2}^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}m_1{u_1}^2 + \frac{1}{2}I_\rho{\omega_1}^2 + m_1gh_{\Sigma1} + mgh_{\rho1}$ **(μ. 1)**

$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot{\omega_2}^2 + 0 + 0 = \frac{1}{2}\cdot 2\cdot 4 + \frac{1}{2}\cdot 8\cdot\left(\frac{u_1}{L}\right)^2 + 2\cdot 9{,}81\cdot L\cdot συν(\frac{\pi}{3}) + 6\cdot 9{,}81\cdot\frac{L}{2}\cdot συν(\frac{\pi}{3})$
(μ. 1)

$8\cdot{\omega_2}^2 = 4 + 4 + 19{,}62 + 29{,}43$

$\omega_2 = 2{,}67\ \mathrm{rad/s}$ **(μ. 1)**

ii. το ποσοστό της μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος (ράβδος, σώμα Σ_1) κατά τη διάρκεια της κρούσης,

(μονάδες 4)

$EM_2 = EM_3$ **(μ. 1)**

$$\frac{1}{2}(I_\rho + I_\Sigma){\omega_2'}^2 = m_1gh_{\Sigma3} + mgh_{\rho3}$$

$$\frac{1}{2}\cdot 16\cdot{\omega_2'}^2 = 2\cdot 9{,}81\cdot 1 + 6\cdot 9{,}81\cdot 0{,}5$$

$$8\cdot{\omega_2'}^2 = 6{,}14$$

$$\omega_2' = 2{,}48\ \mathrm{rad/s}$$

$u_\pi = u_0 = \omega y_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}y_0 = 0{,}25\mathrm{m/s}$ **(μ. 1)**

$$\vec{L}_\pi = \vec{L}_M$$

$$m_2u_\pi r + (I_\rho + I_\Sigma)\omega = m_2u_\mu r + (I_\rho + I_\Sigma)\omega'$$

$$38{,}4\cdot(-0{,}25)\cdot 2 \;+\; 16\cdot 2{,}67 \;=\; 38{,}4\cdot\ u_\mu.2 \;+\; 16\cdot(-2{,}48)$$

$-19{,}2 + 42{,}72 = 76{,}8u_\mu - 39{,}68$

$u_\mu = 0{,}82\ \mathrm{m/s}$

(μ. 1)

$$\frac{\varDelta E_\kappa}{E_\kappa}\cdot\% = \frac{\left[\frac{1}{2}\left(I_\rho + I_\Sigma\right)\omega_2'^2\right] - \left[\frac{1}{2}\left(I_\rho + I_\Sigma\right)\omega_2^2\right]}{\left[\frac{1}{2}\left(I_\rho + I_\Sigma\right)\omega_2^2 + \frac{1}{2}m_\Sigma u_2^2\right]}\%$$

$\frac{\varDelta E_\kappa}{E_\kappa}\cdot\% = \frac{\left[\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2{,}48^2\right]-\left[\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2{,}67^2\right]}{\left[\frac{1}{2}\cdot 16\cdot 2{,}67^2\right]}100\% = -13{,}7\%$ **(μ. 1)**

iii. το πλάτος ταλάντωσης του σώματος Σ_2 μετά την κρούση,

(μονάδες 4)

$y_o' = \frac{u_o}{\omega} = \frac{0{,}82}{5} = 0{,}16\ m$ **(μ. 4)**

iv. το χρονικό διάστημα που χρειάζεται το σώμα Σ_2 από τη στιγμή της κρούσης μέχρι να περάσει για δεύτερη φορά από τη θέση που βρίσκεται σε απόσταση 0,02 m από την κάτω ακρότατη του θέση,

(μονάδες 4)

Μετά την κρούση στη θέση 2 το σώμα Σ_2 βρίσκεται στη θέση ισορροπίας και κινείται προς τα κάτω με ταχύτητα $u_\mu = 0{,}82\ \mathrm{m/s}$ και πλάτος ταλάντωσης $y_o' = 0{,}16\ m$. Θεωρώντας θετική τη φορά προς τα πάνω η εξίσωση της ταλάντωσης του σώματος μετά την κρούση θα είναι

$y = 0{,}16\text{ημ}(5t + \pi)$ **(μ. 1)**

Όταν το σώμα απέχει απόσταση $0{,}02\ \mathrm{m}$ από την κάτω ακρότατη θέση του, η απομάκρυνση του από τη θέση ισορροπίας είναι $y = -(0{,}16 - 0{,}02) = -0{,}14\ \mathrm{m}$ **(μ.1)**. Άρα

$\eta\mu(5t + \pi) = \frac{-0{,}14}{0{,}16} = -0{,}875$

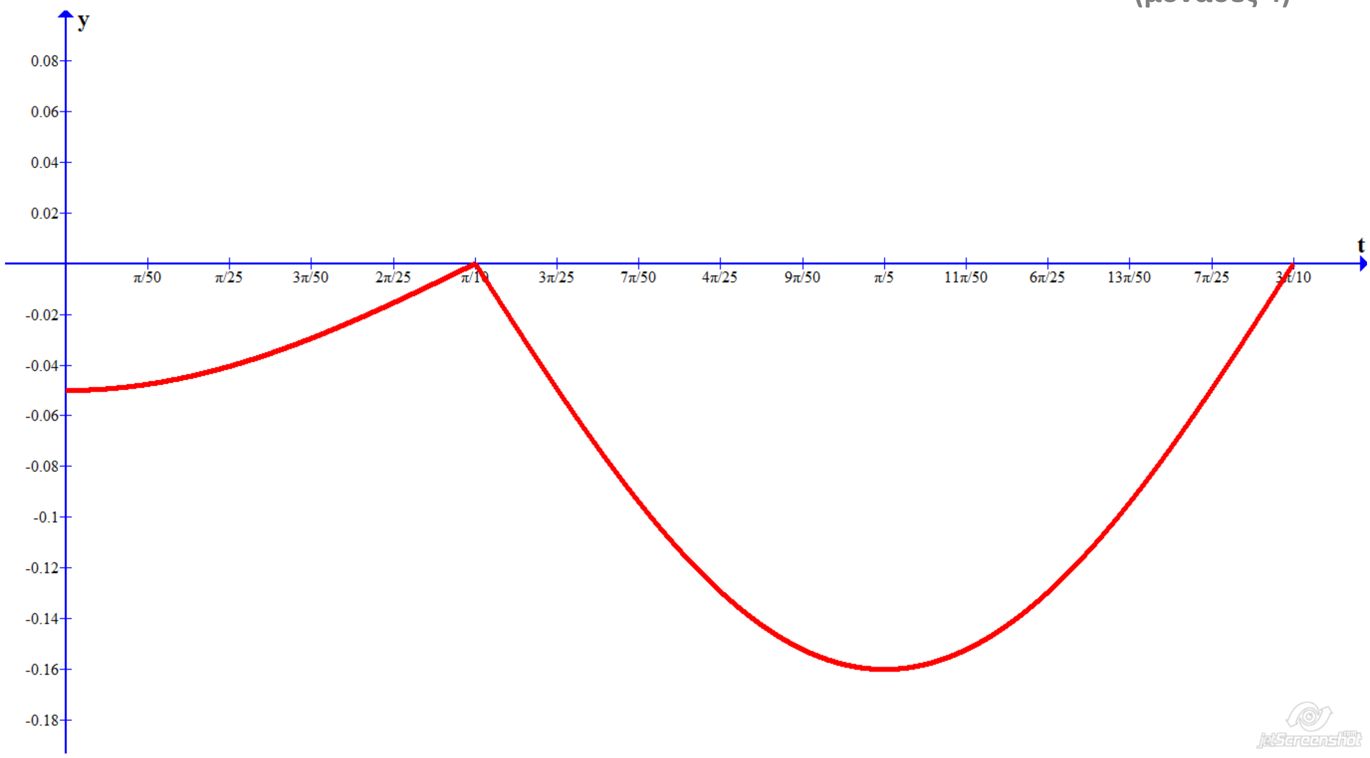
Η λύση αυτής της τριγωνομετρικής εξίσωσης μας δίνει

$5t + \pi = (k\pi - 1{,}065)\mathrm{rad}, \quad k = 1,2, \ldots$ **(μ. 1)**

Μας ενδιαφέρει η δεύτερη διέλευση του σώματος από τη συγκεκριμένη θέση γι’ αυτό

$k = 2 \Rightarrow 5t + \pi = 2\pi - 1{,}065 \Rightarrow t = 0{,}415\ \mathrm{s}$ **(μ. 1)** β. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση θέσης – χρόνου του σώματος $Σ_2$ από τη στιγμή που ξεκίνησε την ταλάντωση του μέχρι να ξαναφτάσει στην θέση ισορροπίας για δεύτερη φορά.

(μονάδες 4)



ΘΕΜΑ 4ο

α. Να δώσετε τον ορισμό της απλής αρμονικής ταλάντωσης (ΑΑΤ).

(μονάδα 1)

Απλή αρμονική ταλάντωση είναι η ταλάντωση, στην οποία η απομάκρυνση του ταλαντωτή από τη θέση ισορροπίας είναι ημιτονοειδής ή συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου.

β. Να γράψετε την συνθήκη που πρέπει να ισχύει για ένα σώμα έτσι ώστε το σώμα να εκτελεί ΑΑΤ.

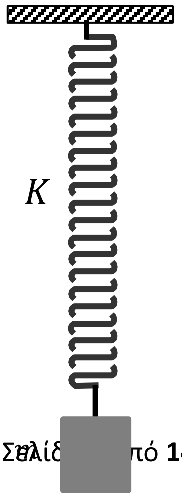
(μονάδα 1)

Ένα σώμα θα εκτελεί ΑΑΤ, αν η συνισταμένη δύναμη που ασκείται σε αυτό είναι ανάλογη της απομάκρυνσης από τη θέση ισορροπίας με αντίθετη φορά, δηλαδή $\Sigma\vec{F} = -D \cdot \vec{x}$.

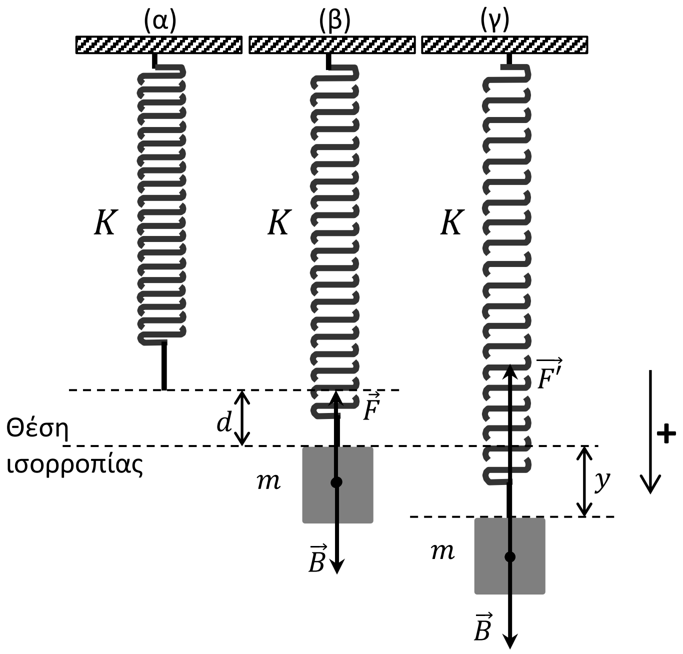
γ. Ένα σώμα μάζας m είναι συνδεδεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς K και ισορροπεί στη θέση που φαίνεται στο σχήμα.

i. Να αποδείξετε ότι αν εκτρέψουμε το σώμα από τη θέση του κατακόρυφα προς τα πάνω (ή προς τα κάτω) και το αφήσουμε ελεύθερο αυτό θα εκτελέσει ΑΑΤ.

(μονάδες 5)



Στο πιο κάτω σχήμα φαίνεται το ελατήριο στο φυσικό του μέγεθος,(α), το ελατήριο με το σώμα στη θέση ισορροπίας, (β), και το ελατήριο σε μια τυχαία θέση κατά την ταλάντωσή του, (γ).



(μ. 3)

Για τη θέση (β) ισχύει $\Sigma F = 0 \Rightarrow B - F = 0 \Rightarrow B = Kd$. **(μ. 1)**

Για τη θέση (γ) θα έχουμε

$\Sigma F' = B - F' \Rightarrow \Sigma F' = B - K(d+y) \Rightarrow \Sigma F' = -Ky \Rightarrow$ το σώμα θα εκτελεί ΑΑΤ με σταθερά ταλάντωσης $D = K$. **(μ. 1)**

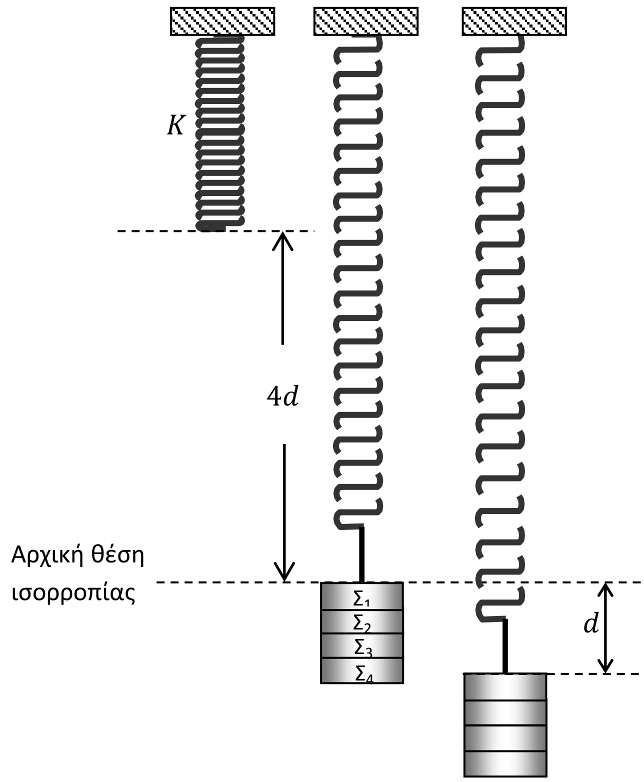
ii. Να δείξετε ότι η περίοδος ταλάντωσης του σώματος δίνεται από τη σχέση

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

(μονάδες 3)

Η σταθερά ταλάντωσης D ενός σώματος που εκτελεί ΑΑΤ είναι ίση με $D = m\omega^2$ **(μ. 1)**. Για την πιο πάνω περίπτωση $D = K$ **(μ. 1)**, άρα

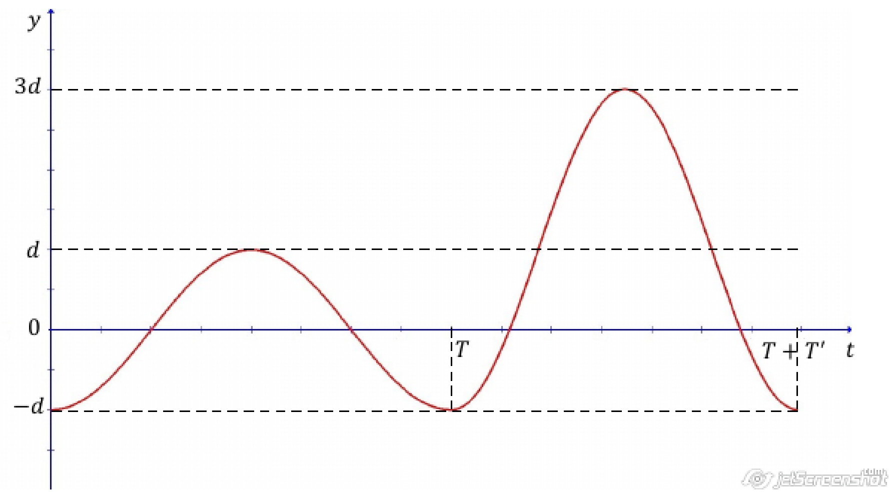
$m\omega^2 = K \Rightarrow m\frac{4\pi^2}{T^2} = K \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ **(μ. 1)** δ. Τέσσερα σώματα Σ_1, Σ_2, Σ_3 και Σ_4 μάζας m το καθένα και αμελητέων διαστάσεων συνδέονται μεταξύ τους και αναρτώνται στο άκρο ελατηρίου σταθεράς K και αμελητέας μάζας. Το ελατήριο επιμηκύνεται κατά $4d$ και τα σώματα ισορροπούν στη θέση που φαίνεται στο σχήμα. Απομακρύνουμε τα σώματα από τη θέση ισορροπίας σε απόσταση d προς τα κάτω και τα αφήνουμε ελεύθερα. Μόλις ολοκληρωθεί μια πλήρης ταλάντωση το σώμα Σ_4 αποκολλάται ακαριαία από τα υπόλοιπα σώματα, τα οποία συνεχίζουν να εκτελούν ΑΑΤ.



i. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των σωμάτων στο άκρο του ελατηρίου από την αρχική θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή που ελευθερώσαμε τα σώματα μέχρι τη στιγμή που ολοκληρώνονται δύο πλήρεις ταλαντώσεις. (Δίνεται: $\sqrt{3}/2 \approx 0{,}87$)

(μονάδες 6)

Θεωρούμε την αρχική εκτροπή των σωμάτων από τη θέση ισορροπίας αρνητική. Η πρώτη ταλάντωση θα πραγματοποιηθεί με περίοδο $T = 2\pi\sqrt{\frac{4m}{K}}$ **(μ. 1)** και πλάτος d **(μ. 1)**. Η δεύτερη ταλάντωση θα έχει περίοδο $T' = 2\pi\sqrt{\frac{3m}{K}} = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot T$ **(μ. 1)** και πλάτος $2d$ **(μ. 1)**. Η δεύτερη ταλάντωση θα γίνει με τη νέα θέση ισορροπίας να είναι κατά απόσταση d πάνω από την αρχική θέση ισορροπίας. Επομένως, η μορφή της γραφικής παράστασης της απομάκρυνσης των σωμάτων από την αρχική θέση ισορροπίας σε συνάρτηση με το χρόνο για δύο ταλαντώσεις θα έχει τη μορφή που φαίνεται πιο κάτω **(μ. 2)**.



ii. Να υπολογίσετε το λόγο της ταχύτητας του ταλαντωτή όταν διέρχεται για πρώτη φορά από την αρχική θέση ισορροπίας προς την ταχύτητα του ταλαντωτή όταν διέρχεται για τρίτη φορά από την αρχική θέση ισορροπίας.

(μονάδες 4)

Την πρώτη φορά που ο ταλαντωτής περνά από την αρχική θέση ισορροπίας η ταχύτητά του θα ισούται με τη μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης, δηλαδή

$$\upsilon_{\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta} = \upsilon_0 = \omega \cdot y_0 \;\Rightarrow\; \upsilon_{\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta} = \sqrt{\frac{K}{4m}} \cdot d \quad \textbf{(μ. 1)}$$

Την τρίτη φορά που ο ταλαντωτής περνά από την αρχική θέση ισορροπίας βρίσκεται σε απόσταση d κάτω από την νέα θέση ισορροπίας **(μ. 1)**. Άρα,

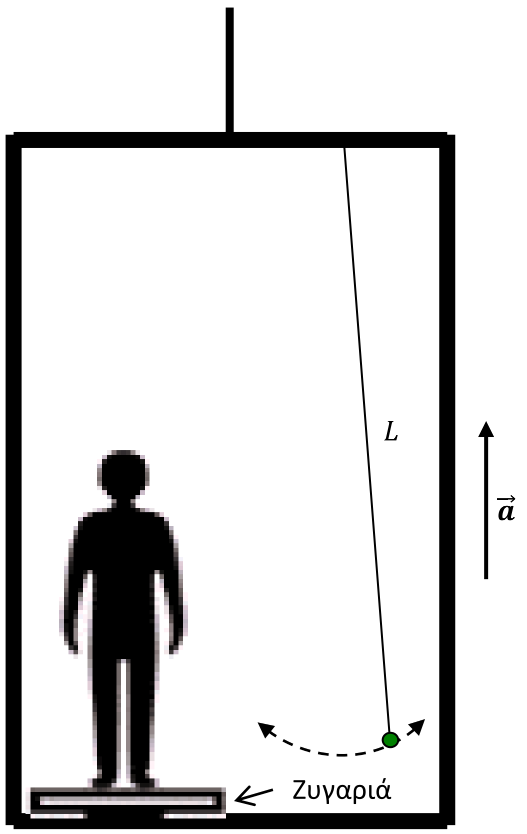
$$\upsilon_{\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta}{}^2 = \omega'^2(y_0^2 - y^2) \Rightarrow \upsilon_{\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta}{}^2 = \frac{K}{3m}(4d^2 - d^2) \Rightarrow \upsilon_{\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta} = \sqrt{\frac{K}{m}} \cdot d \quad \textbf{(μ. 1)}$$

Επομένως

$$\frac{\upsilon_{\pi\rho\acute{\omega}\tau\eta}}{\upsilon_{\tau\rho\acute{\iota}\tau\eta}} = \frac{1}{2} \quad \textbf{(μ. 1)}$$

ΘΕΜΑ 5ο

Ο μαθητής του διπλανού σχήματος έχει μάζα 80kg και στέκεται πάνω σε μια ζυγαριά και βρίσκεται μέσα σε ανελκυστήρα που έχει τη δυνατότητα να κινείται προς τα πάνω με διάφορες επιταχύνσεις. Στην οροφή του ανελκυστήρα είναι στερεωμένο μαθηματικό εκκρεμές μήκους L. Για να προσδιορίσει το μήκος L του εκκρεμούς ο μαθητής εκτελεί το εξής πείραμα: κινεί τον ανελκυστήρα με σταθερή επιτάχυνση και θέτει το εκκρεμές σε ταλάντωση. Με τη ζυγαριά μετρά και καταγράφει το φαινομενικό του βάρος (B_φ). Με ένα χρονόμετρο μετρά και καταγράφει το χρόνο τριών ταλαντώσεων(t). Στη συνέχεια επαναλαμβάνει την ίδια διαδικασία για διάφορες τιμές επιτάχυνσης. Ο πιο κάτω πίνακας δίνει τις τιμές του φαινομενικού βάρους B_φ και τις αντίστοιχες τιμές του χρόνου t τριών ταλαντώσεων.



B_φ (N)	900	1000	1100	1200	1300
t (s)	8,5	8,1	7,7	7,4	7,1

α. Να γράψετε ποιες προϋποθέσεις πρέπει να ικανοποιεί ένα εκκρεμές για να ονομάζεται μαθηματικό.

(μονάδες 3)

Το νήμα πρέπει να είναι αμελητέου βάρους και μη εκτατό **(μ. 1)**. Η μάζα που αναρτάται στο νήμα να είναι αμελητέων σε σχέση με το νήμα διαστάσεων **(μ. 1)** και η γωνία που εκτρέπεται το νήμα από την κατακόρυφη να είναι μικρότερη από δέκα μοίρες **(μ. 1)**.

β. Να εξηγήσετε γιατί ο μαθητής μετρούσε το χρόνο τριών ταλαντώσεων και όχι το χρόνο μιας ταλάντωσης.

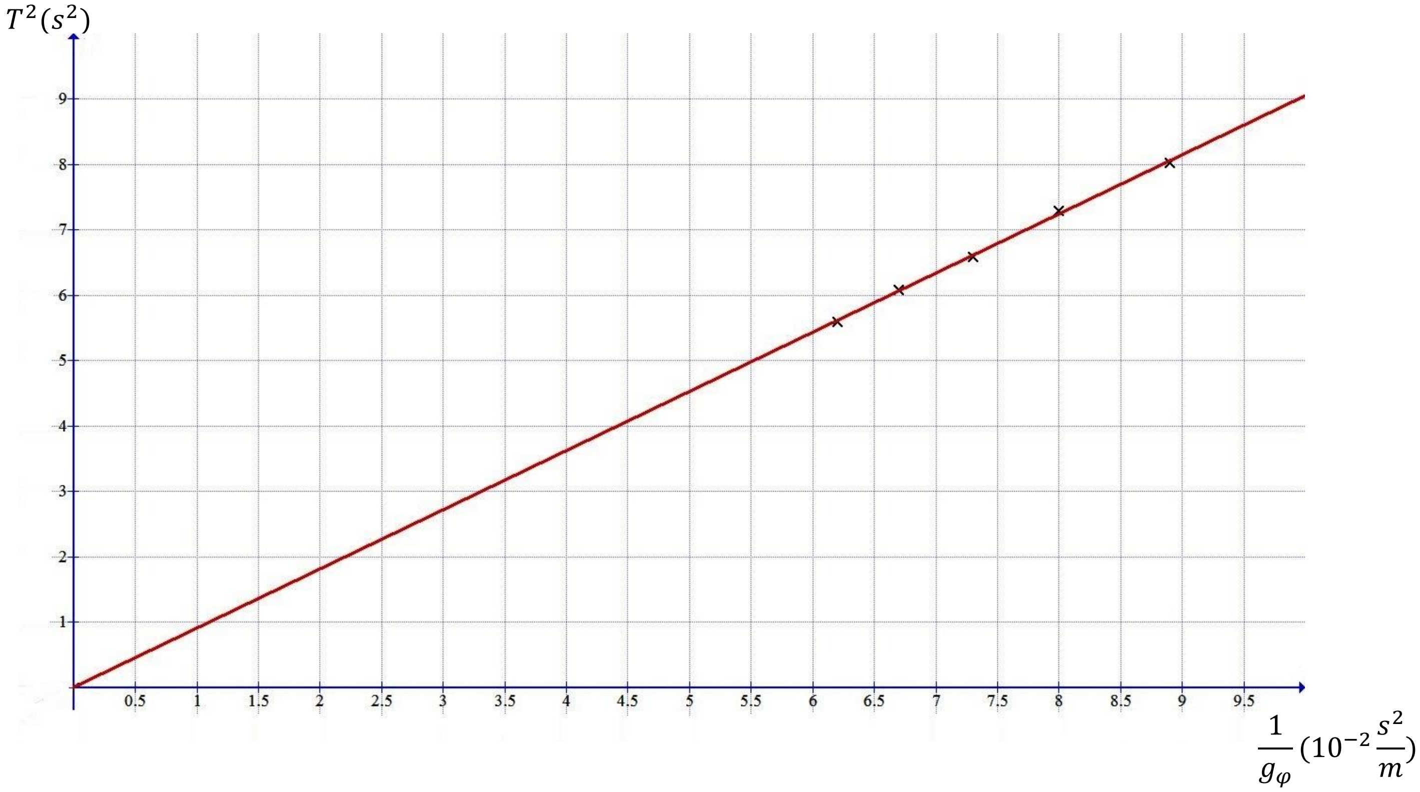
(μονάδες 2)

Για να ελαττώσει το σφάλμα στη μέτρηση του χρόνου.

γ. Να επεξεργαστείτε κατάλληλα τις μετρήσεις του πίνακα και στη συνέχεια να κάνετε κατάλληλη γραφική παράσταση.

(μονάδες 10)

Βφ (N)	900	1000	1100	1200	1300	
t (s)	8,5	8,1	7,7	7,4	7,1	
T^2 (s^2)	8,03	7,29	6,59	6,08	5,60	**(μ. 2)**
$g_φ$ (m/s^2)	11,25	12,50	13,75	15,00	16,25	**(μ. 1)**
$1/g_φ$ (10^{-2} s^2/m)	8,9	8,0	7,3	6,7	6,2	**(μ. 1)**



(μ. 6)

δ. Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης να υπολογίσετε το μήκος του εκκρεμούς.

(μονάδες 5)

Όταν υψώσουμε στο τετράγωνο τη σχέση της περιόδου για το μαθηματικό εκκρεμές θα έχουμε:

$$T^2 = 4\pi^2 L\left(\frac{1}{g_\phi}\right)$$ **(μ. 1)**

Επομένως η κλίση της πιο πάνω γραφικής παράστασης θα ισούται με $4\pi^2 L$ **(μ. 1)**.

Άρα

$$\frac{5{,}6}{6{,}2} \cdot 10^2 = 4\pi^2 L$$

(μ. 2)

και λύνοντας ως προς L θα έχουμε:

$$L = 2{,}29\mathrm{m}\,.$$

(μ. 1)

ΤΕΛΟΣ ΔΟΚΙΜΙΟΥ