Γ΄ Λυκείου

26 Απριλίου 2014

ΟΔΗΓΙΕΣ:
1. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε χαρτί Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί (το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης). Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα γραφήματα ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.
2. Τα γραφήματα του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο μιλιμετρέ χαρτί που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.
3. Οι απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα τόσο του **Θεωρητικού Μέρους** όσο και του **Πειραματικού** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν στο *"Φύλλο Απαντήσεων"* που θα σας δοθεί μαζί με τις εκφωνήσεις των θεμάτων.

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1^{ο}

Α. Ένα ηλεκτρικό δίπολο αποτελείται από δύο ίσα και αντίθετα φορτία, τα οποία κρατιούνται ακίνητα σε απόσταση d. Φανταστείτε ότι έχουμε δύο πανομοιότυπα δίπολα, τα οποία είναι προσανατολισμένα αντίθετα το ένα ως προς το άλλο και απέχουν απόσταση μεταξύ τους ίση με r.

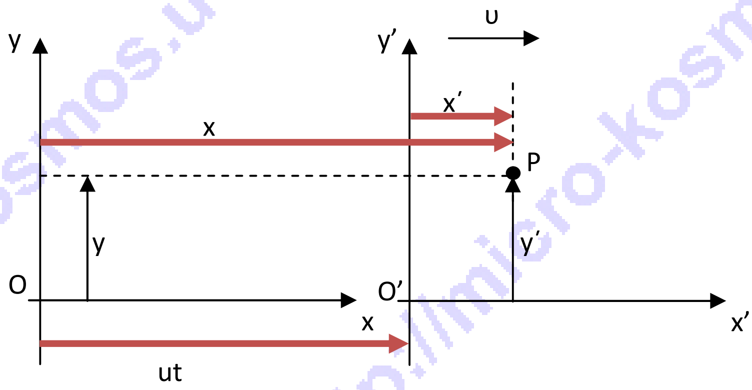
Α1. Όταν αλληλεπιδρούν δύο δίπολα θεωρούμε ότι η δυναμική τους ενέργεια U είναι μηδέν όταν βρίσκονται σε μεγάλη απόσταση. Βασιζόμενοι σε αυτήν την παραδοχή να εκφράσετε την δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο δίπολων συναρτήσει των q,d,r και των θεμελιωδών σταθερών.

Α2. Θεωρήστε ότι d << r. Να δώσετε μια προσεγγιστική έκφραση για τη δυναμική ενέργεια συναρτήσει του q,d, r και των θεμελιωδών σταθερών.

Για την επίλυση του πιο πάνω ερωτήματος χρησιμοποιείστε τη διωνυμική προσέγγιση $(1+x)^n \approx 1+nx$ για |x| << 1

Β. Κατά τη διάρκεια ενός πειράματος φυσικής υψηλών ενεργειών, δύο σωματίδια πλησιάζουν μετωπικά μεταξύ τους με ταχύτητα υ = 0,9520c όπως μετράται στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου. Ποιο είναι το μέτρο της ταχύτητας του κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς του άλλου σωματιδίου;

Υποθέτουμε πως έχουμε δύο συστήματα αναφοράς. Ένα σύστημα S και ένα σύστημα S' το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα υ ως προς το σύστημα S. Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας ένα γεγονός που συμβαίνει σε ένα σημείο (x,y,z) τη χρονική στιγμή t ως προς το σύστημα S, στο σύστημα αναφοράς S' θα συμβαίνει στο



σημείο (x’,y’,z’) τη χρονική στιγμή t’.

Οι συντεταγμένες του γεγονότος στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται μέσω των ακόλουθων σχέσεων, γνωστών και ως μετασχηματισμών Lorentz.

$$x' = \frac{x - \upsilon t}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma\left(x - \upsilon t\right)$$

$$y' = y$$

$$z' = z$$

$$t' = \frac{t - \frac{\upsilon x}{c^2}}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma\left(t - \frac{\upsilon x}{c^2}\right)$$

Θέμα 2^o

Δύο ίδιες τέλεια ελαστικές σφαίρες A και B μάζας m=1kg και ακτίνας R=2m, τοποθετούνται πάνω σε λείο οριζόντιο δάπεδο, έτσι ώστε το κέντρο της πρώτης να βρίσκεται στο x=0 και το κέντρο της δεύτερης στο x=120m, ενώ η διάκεντρός τους βρίσκεται επί του x άξονα. Τη στιγμή t=0 εκτοξεύουμε τη μία σφαίρα εναντίον της άλλης με ταχύτητες μέτρων υ_{oA}=10 m/s και υ_{oB}=6 m/s.

1) Θεωρώντας, σε πρώτη προσέγγιση, ότι η κρούση τους είναι στιγμιαία, να υπολογίσετε:

α) τη στιγμή t_1 της κρούσης,

β) τη θέση κάθε σφαίρας (x_1 και x_2) όταν συγκρούονται

και για χρονικές στιγμές από 0 μέχρι $2t_1$, να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των μεγεθών:

γ) x_A=f(t) και x_B=f(t) στο ίδιο σύστημα αξόνων

δ) υ_A=f(t) και υ_B=f(t) στο ίδιο σύστημα αξόνων

ε) F_A=f(t) και F_B=f(t) στο ίδιο σύστημα αξόνων

στ) Να σχολιάσετε τη μορφή των γραφικών παραστάσεων σε χρονικές στιγμές πέριξ της στιγμής t_1.

2) Σε μια ρεαλιστικότερη προσέγγιση, υποθέτουμε ότι καθόλη τη διάρκεια της κρούσης η δύναμη αλληλεπίδρασης των σφαιρών έχει σταθερή τιμή ίση προς F_o=100 N.

α) Να υπολογίσετε τη διάρκεια της κρούσης

β) Να υπολογίσετε την ελάχιστη κατά μέτρο ταχύτητα κάθε σώματος κατά τη διάρκεια της κρούσης, καθώς και τις χρονικές στιγμές που εμφανίζεται αυτή. Είναι ο μηδενισμός των ταχυτήτων ταυτόχρονος; Σχολιάστε.

γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση των κέντρων των δύο σφαιρών.

δ) Υποθέτοντας ότι η ελαστικότητα των σφαιρών εκδηλώνεται κατά τρόπο παρόμοιο με εκείνο ενός ελατηρίου, να υπολογίσετε την τιμή της ισοδύναμης σταθεράς σκληρότητας k.

ε) Να σχεδιάσετε τα διαγράμματα του ερωτήματος 1 για τις χρονικές στιγμές που αντιστοιχούν στη διάρκεια της κρούσης.

3) Επεκτείνοντας την αναλογία με το ελατήριο, βελτιώνουμε περαιτέρω το μοντέλο της κρούσης, θεωρώντας ότι η δύναμη μεταβάλλεται γραμμικά από την τιμή 0, κατά την έναρξη της κρούσης μέχρι μια μέγιστη τιμή (έστω και πάλι F_o=100 N) και κατόπιν μειώνεται γραμμικά, μέχρι μηδενισμού της με τον ίδιο ρυθμό κατ΄ απόλυτη τιμή.

α) Πόση πιστεύετε ότι θα είναι τώρα η διάρκεια της κρούσης; Να αποδείξετε τον ισχυρισμό σας χωρίς να εκτελέσετε αριθμητικούς υπολογισμούς.

β) Συναρτήσει των δεδομένων του προβλήματος και των μέχρι τώρα αποτελεσμάτων σας, να γράψετε τις αριθμητικές εκφράσεις των συναρτήσεων F_A=f(t) και F_B=f(t), $υ_A$=f(t) και $υ_B$=f(t), x_A=f(t) και x_B=f(t).

γ) Να υπολογίσετε την ελάχιστη απόσταση προσέγγισης των σφαιρών.

δ) Ποια είναι τώρα η τιμή της ισοδύναμης σταθεράς σκληρότητας k;

ε) Να σχεδιάσετε ποιοτικά τα διαγράμματα του ερωτήματος **2ε**.

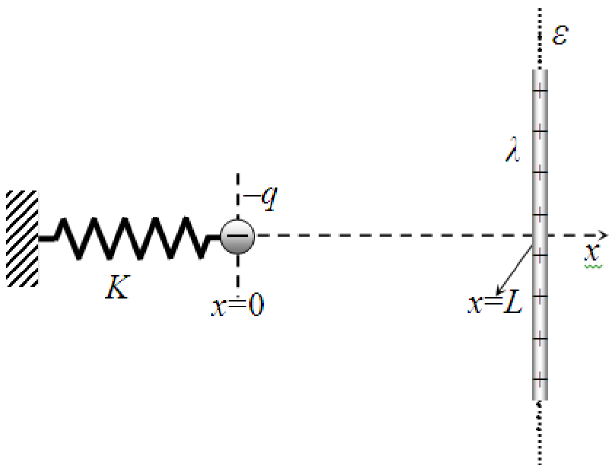
Θέμα 3^o

Στο δεξιό άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς Κ έχει στερεωθεί αρνητικό φορτίο τιμής –q (q>0). Το αριστερό άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο σε ακλόνητο σημείο. Το φορτίο μπορεί να κινείται μόνο πάνω στον άξονα x. Σε απόσταση L από το δεξιό άκρο του ελατηρίου, όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος, έχει τοποθετηθεί κατακόρυφα μία γραμμική κατανομή θετικού φορτίου απείρου μήκους, δηλαδή θετικά φορτία που έχουν τοποθετηθεί πάνω σε μία ευθεία ε. Ο άξονας x και η γραμμική κατανομή φορτίου ανήκουν στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο. Η γραμμική κατανομή θετικού φορτίου απείρου μήκους χαρακτηρίζεται από τη γραμμική πυκνότητα φορτίου λ, δηλαδή το φορτίο ανά μονάδα μήκους και παράγει ένταση ηλεκτρικού πεδίου με τα εξής χαρακτηριστικά:

i) Η διεύθυνση της έντασης του ηλεκτρικού πεδίου σε σημείο Α εκτός της ε, βρίσκεται σε επίπεδο που είναι κάθετο στην ε, διέρχεται από το Α και τέμνει την *ε* σε σημείο έστω Κ. Η διεύθυνση της έντασης στο Α βρίσκεται πάνω στην ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Α και Κ, ενώ η φορά της είναι από το Κ προς το Α.

ii) Το μέτρο της έντασης είναι: $E = K_{ΗΛ}\dfrac{2\lambda}{r}$,

όπου $K_{ΗΛ}$ είναι η ηλεκτρική σταθερά και *r* η απόσταση ΑΚ.



Τοποθετώντας το 0 του άξονα *x* στο δεξιό άκρο του ελατηρίου όταν αυτό έχει το φυσικό του μήκος και *L* το σημείο που ο άξονας *x* τέμνει την *ε* και θεωρώντας γνωστές τις ποσότητες *K*, $K_{ΗΛ}$, *λ*, *q* και *L*, απαντήστε στα παρακάτω ερωτήματα:

1) Βρείτε τα σημεία x_0 πάνω στον άξονα x στα οποία το φορτίο q ισορροπεί, αναφέροντας τη συνθήκη που πρέπει να πληρούν οι γνωστές σας ποσότητες, ώστε να υπάρχουν τέτοια σημεία.

2) Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται *ευσταθές*, αν, όταν ένα σώμα βρεθεί σε αυτό και εκτραπεί κατά μικρές απομακρύνσεις από αυτό, τότε το σώμα επανέρχεται στη θέση ισορροπίας από τις δυνάμεις που ασκούνται πάνω του. Ένα σημείο ισορροπίας λέγεται *ασταθές*, αν, όταν ένα σώμα βρεθεί σε αυτό και εκτραπεί κατά μικρές απομακρύνσεις από αυτό, τότε το σώμα δεν επανέρχεται στη θέση ισορροπίας αλλά απομακρύνεται από τη θέση αυτή, εξαιτίας των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του. Χαρακτηρίστε τα σημεία του προηγούμενου ερωτήματος ως ευσταθή ή ασταθή.

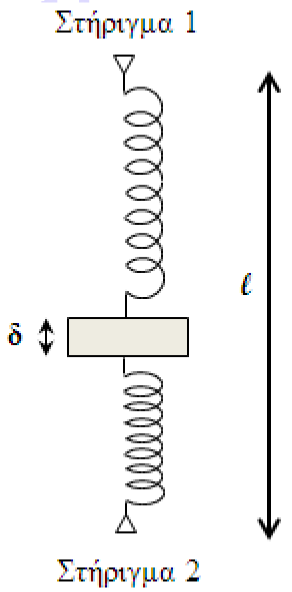
(*Υπόδειξη*: Μπορείτε να θεωρήσετε μικρές απομακρύνσεις Δx από τα σημεία x_0 και να χρησιμοποιήσετε την προσέγγιση $(1+\alpha)^{\nu} \cong 1+\nu\alpha$, όπου οι ποσότητες α και ν είναι θετικές ή αρνητικές, ενώ η ποσότητα α είναι κατ' απόλυτη τιμή πολύ μικρότερη από τη μονάδα, $|\alpha|<<1$).

3) Κάτω από ποιες προϋποθέσεις το φορτίο q μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση; Υπολογίστε τη σταθερά επαναφοράς D της ταλάντωσης σε αυτήν την περίπτωση.

4) Προς τα πού θα κινηθεί αρχικά το φορτίο q αν αφεθεί ελεύθερο σε κάποιο σημείο x χωρίς αρχική ταχύτητα στην περίπτωση που δεν πληρείται η συνθήκη που βρήκατε στο ερώτημα 1;

Πειραματικό Μέρος

Α. Στην πειραματική σας ομάδα δίνονται τρία ελατήρια (το μπλε, το κόκκινο και το γκρι), με σταθερές για το μπλε k_1=1,00 N/cm και για το κόκκινο k_2= 0,60 N/cm.



Σας ενημερώνουν επίσης ότι στο γκρι ελατήριο η συνήθης μέθοδος υπολογισμού της σταθεράς του ελατηρίου (μέθοδος της ανάρτησης διαφόρων γνωστών μαζών) δημιουργούσε ένα πρόβλημα ακρίβειας στη μέτρηση της επιμήκυνσής του.

Έτσι προτάθηκε μία διαφορετική μέθοδος μέτρησης της σταθεράς k, στην οποία δεν γίνεται άμεση μέτρηση της επιμήκυνσης του γκρι ελατηρίου.

Πραγματοποιήθηκε η σύνδεση του σχήματος με το μπλε και το γκρι ελατήριο.

ΓΚΡΙ ΑΝΩ-ΜΠΛΕ ΚΑΤΩ

Απόσταση στηριγμάτων ℓ =72 cm

Φυσικό μήκος γκρι ελατηρίου $\boldsymbol{\ell_2}$= 23,4 cm

Φυσικό μήκος μπλε ελατηρίου $\boldsymbol{\ell_1}$= 22,8 cm

Ύψη των μαζών **δ** (όπως φαίνονται στον πίνακα)

Στο φύλλο απαντήσεων να συμπληρώσετε τις τιμές που λείπουν από τον ακόλουθο πίνακα.

Μάζα m (g)	200	300	500
Ύψος δ της μάζας (cm)	9,2	9,2	9,6
Επιμήκυνση μπλε ελατηρίου x_1 (cm)	3,2	2,4	0,8
Δύναμη F_1 μπλε ελατηρίου (N)			
Δύναμη F_2 γκρι ελατηρίου (N)			
Επιμήκυνση γκρι ελατηρίου x_2 (cm)			

Α1. Σχεδιάστε την κατάλληλη γραφική παράσταση προκειμένου να προσδιορίσετε την τιμή του k του γκρι ελατηρίου.

Α2. Από αυτή προσδιορίστε την τιμή της άγνωστης σταθεράς k.

Β. Με βάση την τιμή της σταθεράς k του γκρι ελατηρίου που προσδιορίστηκε πειραματικά και χρησιμοποιώντας (για μεγαλύτερη ακρίβεια) και τα τρία ελατήρια, μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα ενός άγνωστου σώματος **μόνο με μετρήσεις μήκους.**

Αναρτούμε την άγνωστη μάζα διαδοχικά από τα τρία ελατήρια και παίρνουμε τις ακόλουθες μετρήσεις επιμήκυνσης:

Ελατήριο	**Επιμήκυνση x (cm)**
Μπλε	40,5
Κόκκινο	66,2
Γκρι	108,4

Β1. Σχεδιάστε την κατάλληλη γραφική παράσταση.

Β2. Από αυτή προσδιορίστε την τιμή της άγνωστης μάζας.

Γ. Σας δίνεται ένα αδιαφανές δυναμόμετρο ειδικής κατασκευής, μέσα στο οποίο έχουν τοποθετηθεί το μπλε και το κόκκινο ελατήριο συνδεδεμένα είτε κατά σειρά είτε παράλληλα.

Με το δυναμόμετρο αυτό λαμβάνουμε τις ακόλουθες μετρήσεις:

Επιμήκυνση x (cm)	**Συνισταμένη Δύναμη Ελατηρίων F (N)**
5,2	2
10,8	4
15,8	6
21,1	8

Γ1. Σχεδιάστε την αντίστοιχη γραφική παράσταση.

Γ2. Από αυτή να προσδιορίσετε τον τρόπο σύνδεσης των δύο ελατηρίων.

Καλή Επιτυχία

http://micro-kosmos.uoa.gr

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ’ αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Γ΄ Λυκείου - Β΄ Φάση

ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος
Θέμα 1^o

Α1. U=…………………………………

Α2. U≈……………………………….....

Β. $υ_{σχετ}$=…………………………………………………

Θέμα 2^o

1)

α) t_1=……………………………….

β) x_1=……………………… , x_2=………………………

γ) Στο τετράδιο απαντήσεων

δ) Στο τετράδιο απαντήσεων

ε) Στο τετράδιο απαντήσεων

στ) ……………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

2)

α) Δt=……………………………….

β) $υ_{1min}$=………… , $t_{μηδ,1}$=……… , $υ_{2min}$=………… , $t_{μηδ,2}$=………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

…………………………………………………………………………………………………

γ) $Δx_{min}$=……………..

δ) k=……………..

http://micro-kosmos.uoa.gr

ε) Στο τετράδιο απαντήσεων

3)

α) Δt΄=……………………………….

………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………….

………………………………………………………………………………………………….

β)

F_A=

F_B=

$υ_A$=

$υ_B$=

x_A=

x_B=

γ) $Δx΄_{min}$=……………..

δ) k=……………..

ε) Στο τετράδιο απαντήσεων

http://micro-kosmos.uoa.gr

Θέμα 3^{ο}

1. ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

2. ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

3. ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

D = ……………………………

4. ……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………
……………………………………………………………………………………………………

Πειραματικό Μέρος

Α.

Δύναμη F_1 μπλε ελατηρίου (N)			
Δύναμη F_2 γκρι ελατηρίου (N)			
Επιμήκυνση γκρι x_2 (cm)			

Α1. Στο μιλιμετρέ χαρτί

Α2. k=……………………

Β1. Στο μιλιμετρέ χαρτί

Β2. m=……………………

Γ1. Στο μιλιμετρέ χαρτί

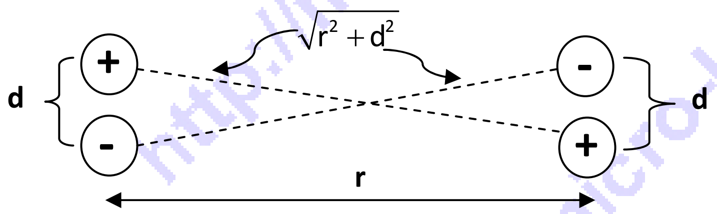
Γ2. Τρόπος σύνδεσης: ……………………………

http://micro-kosmos.uoa.gr

Προτεινόμενες Απαντήσεις / Λύσεις

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο
Α1.



Η δυναμική ενέργεια δύο φορτίων +q και –q που απέχουν μεταξύ τους απόσταση d, είναι ίση με:

$$U_1 = -K\frac{q^2}{d}$$

Η δυναμική ενέργεια δύο φορτίων +q και –q που απέχουν μεταξύ τους απόσταση r, είναι ίση με:

$$U_2 = -K\frac{q^2}{r}$$

Η δυναμική ενέργεια του ζεύγους φορτίων +q και +q και του ζεύγους φορτίων –q και –q που απέχουν μεταξύ τους απόσταση $\sqrt{r^2+d^2}$, έχουν δυναμική ενέργεια ίση με:

$$U_3 = K\frac{q^2}{\sqrt{r^2+d^2}}$$

Επομένως η δυναμική ενέργεια του συστήματος των δύο διπόλων θα είναι ίση με

$$\boxed{U = Kq^2\left(-\frac{2}{r}+\frac{2}{\sqrt{r^2+d^2}}\right)} \quad (1)$$

Ο πρώτος όρος U_1 δεν λαμβάνεται υπόψη στην τελική έκφραση διότι δεν μηδενίζεται όταν το r τείνει στο άπειρο.

Α2. Η σχέση (1) γράφεται ως εξής:

$$(1) \Rightarrow U = Kq^2\left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r^2\left(1+\left(\frac{d}{r}\right)^2\right)}}\right) = K\cdot\frac{2\cdot q^2}{r}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{d}{r}\right)^2}} - 1\right)$$

$$\Rightarrow U \approx K\cdot\frac{2\cdot q^2}{r}\left(1-\frac{1}{2}\left(\frac{d}{r}\right)^2 - 1\right) \quad ,\text{διότι } \left|\frac{d}{r}\right| < 1$$

$$\Rightarrow \boxed{U \approx -K\frac{q^2\cdot d^2}{r^3}}$$

Β.

$$x' = \frac{x-\upsilon t}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma\left(x-\upsilon t\right) \Rightarrow dx' = \gamma\left(dx-\upsilon dt\right) \quad (1)$$

$$t' = \frac{t-\frac{\upsilon x}{c^2}}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} = \gamma\left(t-\frac{\upsilon x}{c^2}\right) \Rightarrow dt' = \gamma\left(dt-\frac{\upsilon dx}{c^2}\right) \quad (2)$$

Διαιρώντας την (1) με τη (2) εξάγουμε την ακόλουθη σχέση:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon}{1-\frac{\upsilon\cdot\upsilon_x}{c^2}} \quad (3)$$

με $\upsilon_x = \frac{dx}{dt}, \upsilon'_x = \frac{dx'}{dt}$ και όπου υ η σταθερή ταχύτητα του κινούμενου συστήματος αναφοράς. Στο συγκεκριμένο πρόβλημα το ένα από τα δύο σωματίδια αποτελούν το κινούμενο σύστημα αναφοράς με ταχύτητα υ = - 0,9520c, ενώ το άλλο θα έχει ταχύτητα ως προς το εργαστήριο ίση με υ_x = 0,9520c.

Αντικαθιστώντας τα τελευταία δεδομένα στην εξίσωση (3) προκύπτουν τα εξής:

$$\upsilon'_x = \frac{\upsilon_x - \upsilon}{1-\frac{\upsilon\cdot\upsilon_x}{c^2}} = \frac{0{,}9520c-(-0{,}9520c)}{1-\frac{(0{,}9520c)\cdot(-0{,}9520c)}{c^2}} = 0{,}9988c$$

Οπότε το μέτρο της ταχύτητας του κάθε σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς του άλλου σωματιδίου είναι ίσο με $\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau.} = 0{,}9988c$

Θέμα 2°

1)

α) Οι εξισώσεις κίνησης των δύο σωμάτων είναι:

$x_A = x_{oA} + \upsilon_{oA}t$ και $x_B = x_{oB} + \upsilon_{oB}t$ με $x_{oA} = 0$, $\upsilon_{oA} = 10m/s$, $x_{oB} = 120$ και $\upsilon_{oB} = -6m/s$.

Συνεπώς η διάκεντρος των σφαιρών εκφράζεται από τη σχέση:

$x_B - x_A = x_{oB} + \upsilon_{oB}t - (x_{oA} + \upsilon_{oA}t) \Rightarrow \Delta x = (x_{oB} - x_{oA}) + (\upsilon_{oB} - \upsilon_{oA})t.$

Η κρούση συμβαίνει όταν Δx=2R, άρα

$$t_1 = \frac{2R - (x_{oB} - x_{oA})}{\upsilon_{oB} - \upsilon_{oA}}$$

Αντικαθιστώντας έχουμε:

$$t_1 = \frac{2\cdot 2 - (120 - 0)}{-6 - 10}s = \frac{4 - 120}{-16}s = 7{,}25s$$

β) Τη στιγμή εκείνη τα κέντρα των σφαιρών βρίσκονται στις θέσεις:

$$x_1 = 72{,}5m \text{ και } x_2 = 76{,}5m$$

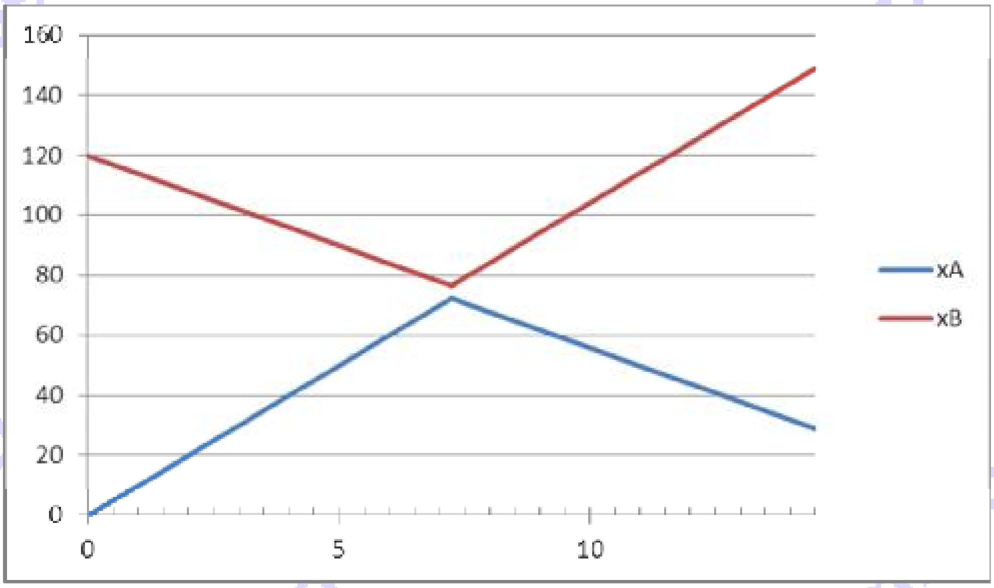
Αφού οι μάζες τους είναι ίσες, οι σφαίρες κατά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες:

$$\upsilon_A' = -6\ m/s \text{ και } \upsilon_B' = 10\ m/s$$

γ) Άρα οι συναρτήσεις θέσεις για το ζητούμενο χρονικό διάστημα είναι:

$$x_A = \begin{cases} 10t\ ,\ t \le 7{,}25s \\ 72{,}5 - 6t\ ,\ t > 7{,}25s \end{cases} \text{ και } x_B = \begin{cases} 120 - 6t\ ,\ t \le 7{,}25s \\ 76{,}5 + 10t\ ,\ t > 7{,}25s \end{cases}$$

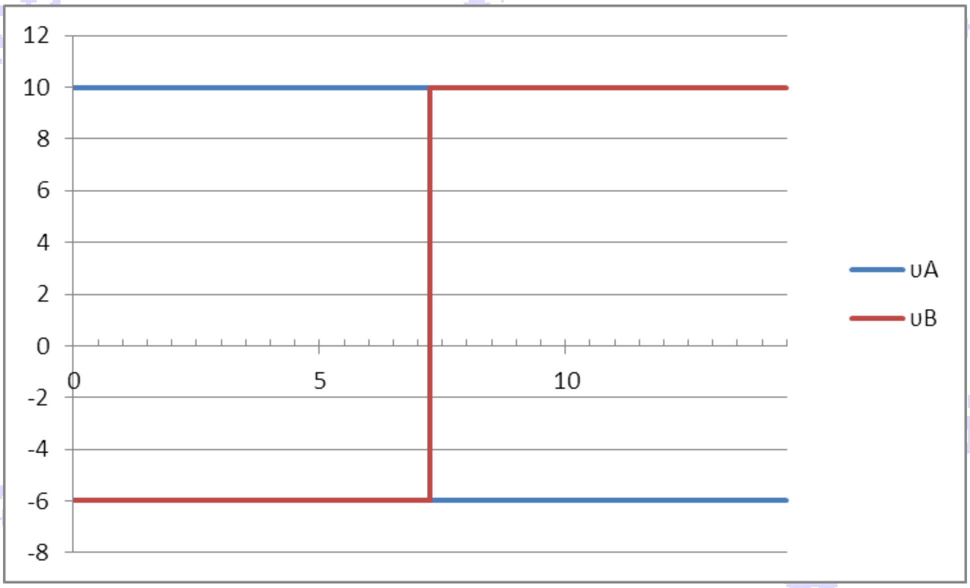
Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:



δ) Για τις ταχύτητες έχουμε αντίστοιχα:

$$v_A = \begin{cases} v_{0A} = 10 \ , t \leq 7{,}25s \\ v_{0B} = -6 \ , t > 7{,}25s \end{cases} \quad \text{και} \quad v_B = \begin{cases} v_{0B} = -6 \ , t \leq 7{,}25s \\ v_{0A} = 10 \ , t > 7{,}25s \end{cases}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:



ε) Δεδομένου ότι η διάρκεια της κρούσης θεωρείται μηδενική η δύναμη που δέχεται κάθε σφαίρα απειρίζεται τη στιγμή 7,25s και είναι μηδέν σε κάθε άλλη στιγμή:

$$F_A = \begin{cases} 0 \ , t \neq 7{,}25s \\ -\infty \ , t = 7{,}25s \end{cases} \quad \text{και} \quad F_B = \begin{cases} 0 \ , t \neq 7{,}25s \\ \infty \ , t = 7{,}25s \end{cases}$$

Η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι:

στ) Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της ταχύτητας κάθε σώματος παρουσιάζει μια ασυνέχεια τη στιγμή t_1, συμπεριφορά που προφανώς δεν είναι ρεαλιστική, αλλά εξιδανικευμένη.

Από το θεμελιώδη Νόμο της Δυναμικής γνωρίζουμε ότι $F \cdot \Delta t = \Delta P = m \cdot \Delta u$, που, γραφικά, αποδίδεται από το εμβαδό που ορίζεται από τη γραφική παράσταση. Δεδομένου ότι η μεταβολή ταχύτητας (ορμής) κάθε σώματος είναι μη μηδενική ενώ $\Delta t = 0$, καταλήγουμε σε μια "ιδιόμορφη" συνάρτηση που απειρίζεται για $t=t_1$ και είναι 0 για κάθε άλλη στιγμή, περικλείοντας μη μηδενικό εμβαδό (ονομάζεται συνάρτηση δ του Dirac).

2)

α) Όπως ήδη υπολογίσαμε η κρούση ξεκινά τη στιγμή t_1=7,25s.
Με δεδομένη τα (σταθερή) τιμή της δύναμης αλληλεπίδρασης των δύο σφαιρών και την αναγκαία μεταβολή ορμής, υπολογίζουμε τη διάρκεια της κρούσης:

$$\Delta t=\frac{\Delta P}{F}=\frac{m_A(v_A'-v_{oA})}{F_o}=\frac{1(-6-10)}{-100}s=\frac{-16}{-100}s=0{,}16s$$

Δηλαδή η κρούση ολοκληρώνεται τη στιγμή $t_2=t_1+\Delta t$=7,41s.

β) Εφόσον οι ταχύτητες των δύο σωμάτων αλλάζουν φορά κατά την κρούση, συμπεραίνουμε ότι η ελάχιστη κατά μέτρο ταχύτητά τους θα είναι 0.
Για την πρώτη σφαίρα ισχύει:

$$v_A=v_{oA}+\alpha_A\cdot(t-t_1)\quad,\quad t_1\le t\le t_2\qquad(1)$$

με $\alpha_A=-F_o/m=-100\ m/s^2$.
Άρα η στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας της πρώτης σφαίρας συμβαίνει 0,1s μετά την έναρξη της κρούσης, δηλαδή τη στιγμή 7,35s.
Αντίστοιχα για τη δεύτερη σφαίρα έχουμε:

$$v_B=v_{oB}+\alpha_A\cdot(t-t_1)\quad,\quad t_1\le t\le t_2\qquad(2)$$

με $\alpha_B=F_o/m=100\ m/s^2$.

Άρα η στιγμή μηδενισμού της ταχύτητας της πρώτης σφαίρας συμβαίνει 0,06s μετά την έναρξη της κρούσης, δηλαδή τη στιγμή 7,31s.
Παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες των σφαιρών ΔΕ μηδενίζονται την ίδια στιγμή. Προηγείται ο μηδενισμός της ταχύτητας της σφαίρας που έχει τη μικρότερη κατά μέτρο ταχύτητα, γεγονός αναμενόμενο, αφού οι δύο σφαίρες δέχονται ίσες δυνάμεις (Τρίτος Νόμος του Newton) και έχουν ίσες μάζες, δηλαδή υφίστανται ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις.

γ) Κατά τη διάρκεια της κίνησής τους οι σφαίρες επιβραδύνονται. Συνεπώς η ελάχιστη απόσταση των κέντρων τους θα αντιστοιχεί στη στιγμή που έχουν κοινή (διανυσματική) ταχύτητα, δηλ. για μια στιγμή αποτελούν συσσωμάτωμα με κοινή ταχύτητα V. Από τη διατήρηση της Ορμής βρίσκουμε:

$$\vec{P_A}+\vec{P_B}=\vec{P_{OA}}\Rightarrow m_A\overrightarrow{v_{oA}}+m_B\overrightarrow{v_{oB}}=m_{OA}\vec{V}\Rightarrow m_Av_{oA}+m_B(-v_{oB})=m_{OA}V$$

$$\Rightarrow m(v_{oA}-v_{oB})=2mV\Rightarrow V=\frac{v_{oA}-v_{oB}}{2}\Rightarrow V=\frac{10-6}{2}m/s\Rightarrow V=2m/s$$

Από τη σχέση (1) ή τη (2) μπορούμε να βρούμε τη στιγμή t_3 που οι δύο σφαίρες έχουν ταχύτητα V:

$$V=v_{oA}+\alpha_A\cdot(t_3-t_1)\Rightarrow t_3=\frac{V-v_{oA}}{\alpha_A}+t_1\Rightarrow t_3=\left(\frac{2-10}{-100}+7{,}25\right)s\Rightarrow$$

$$\Rightarrow t_3=\left(\frac{-8}{-100}+7{,}25\right)s\Rightarrow t_3=(0{,}08+7{,}25)s\Rightarrow t_3=7{,}33s$$

Οι εξισώσεις κίνησης των σφαιρών θα είναι:

$$x_A = x_1 + v_{oA}\cdot(t-t_1) + \frac{1}{2}\alpha_A\cdot(t-t_1)^2 \quad , \quad t_1 \le t \le t_2 \quad (3)$$

και

$$x_B = x_2 + v_{oB}\cdot(t-t_1) + \frac{1}{2}\alpha_B\cdot(t-t_1)^2 \quad , \quad t_1 \le t \le t_2 \quad (3)$$

Συνεπώς, οι θέσεις των σφαιρών τη στιγμή t_3 θα είναι:

$$x_{A3} = \left(72{,}5 + 10\cdot 0{,}08 + \frac{1}{2}(-100)\cdot 0{,}08^2\right)m = 72{,}98m$$

και:

$$x_{B3} = \left(76{,}5 - 6\cdot 0{,}08 + \frac{1}{2}100\cdot 0{,}08^2\right)m = 76{,}34m$$

Άρα η ελάχιστη απόσταση των κέντρων θα είναι $\Delta x_{min} = x_{B3} - x_{A3} = 3{,}36m$

δ) Αφού η διάκεντρος είναι μικρότερη του 2R, συμπεραίνουμε ότι τη στιγμή t_3 οι σφαίρες έχουν υποστεί (μέγιστη) ελαστική παραμόρφωση. Η δυναμική τους ενέργεια λόγω κατάστασης προκύπτει από το έλλειμμα κινητικής ενέργειας, δηλ.:

$$U_{OA} = \Delta K = K_{OA}^{\alpha\rho\chi} - K_{OA3} \Rightarrow U_{OA} = \frac{1}{2}mv_{oA}^2 + \frac{1}{2}mv_{oB}^2 - \frac{1}{2}m_{OA}V^2$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$U_{OA} \approx 14{,}27J$

Αφού οι σφαίρες είναι όμοιες, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε στιγμή παραμορφώνονται κατά τον ίδιο τρόπο, άρα τη στιγμή t_3 σε καθεμιά αντιστοιχεί η μισή της παραπάνω δυναμικής ενέργειας.

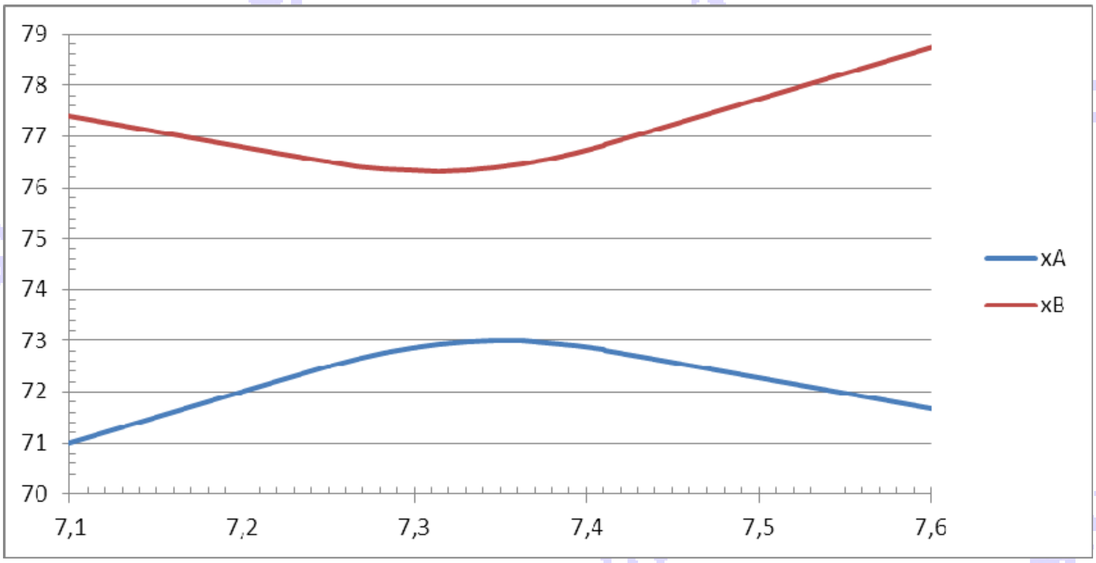
Εξ άλλου, η συνολική παραμόρφωση είναι $\Delta r_{OA} = 2R - \Delta x_{min} = (4 - 3{,}36)m = 0{,}64m$. Και πάλι, λόγω ομοιότητας των σφαιρών, σε κάθε μία αντιστοιχεί το μισό αυτής της παραμόρφωσης.

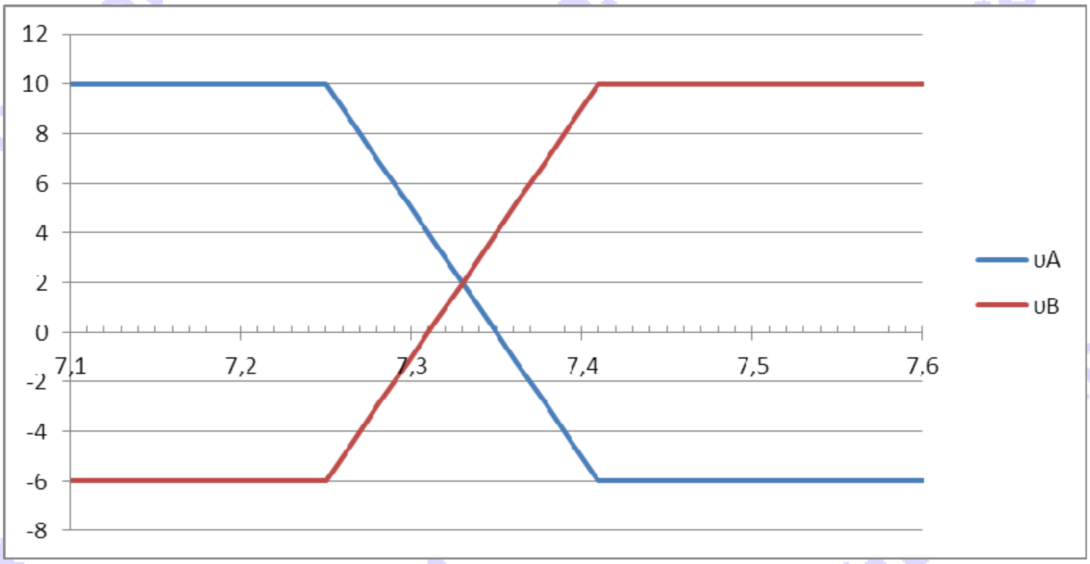
Άρα $U_A = \frac{U_{OA}}{2} = \frac{1}{2}k\Delta r_A^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{\Delta r_{OA}}{2}\right)^2 \Rightarrow U_{OA} = k\left(\frac{\Delta r_{OA}}{2}\right)^2 \Rightarrow k = \frac{U_{OA}}{\left(\frac{\Delta r_{OA}}{2}\right)^2} \Rightarrow k \approx \frac{14{,}27}{\left(\frac{0{,}64}{2}\right)^2}N/m$

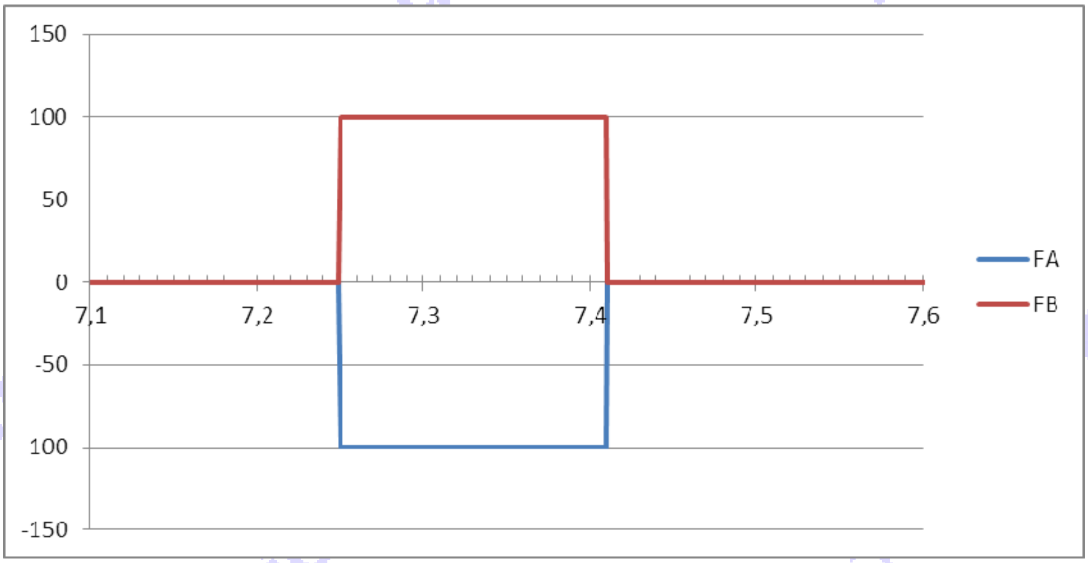
$\Rightarrow k \approx 139N/m$

ε) Τα αντίστοιχα διαγράμματα φαίνονται σε επόμενα σχήματα:

http://micro-kosmos.uoa.gr


79
78
77
76
75
74
73
72
71
70
7,1
7,2
7,3
7,4
7,5
7,6
xA
xB


12
10
8
6
4
2
0
-2
-4
-6
-8
7,1
7,2
7,3
7,4
7,5
7,6
υA
υB


150
100
50
0
-50
100
-150
7,1
7,2
7,3
7,4
7,5
7,6
FA
FB

3)

α) Όπως προαναφέρθηκε, η μεταβολή της ορμής κάθε σφαίρας ισούται αριθμητικά με το εμβαδό που περικλείεται στο γράφημα F=f(t). Από το τρίτο σχήμα του ερωτήματος **2ε** βλέπουμε ότι πρόκειται για παραλληλόγραμμο. Αν αντί της σταθερής δύναμης, θεωρήσουμε γραμμική εξάρτηση ως προς το χρόνο, το αντίστοιχο σχήμα θα είναι (ισεμβαδικό) τρίγωνο, και μάλιστα ισοσκελές αφού γνωρίζουμε ότι η δύναμη μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό τόσο κατά την αύξηση όσο και κατά τη μείωση της τιμής της. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η βάση του τριγώνου θα είναι διπλάσια της βάσης του παραλληλογράμμου, άρα η διάρκεια της κρούσης θα είναι:

$\Delta t' = 2\Delta t = 0{,}32s$

Δηλ. η κρούση θα ξεκινά και πάλι τη στιγμή t_1=7,25s, αλλά θα ολοκληρώνεται η στιγμή $t_2'=t_1+\Delta t'$=7,57s

β) Για τη σφαίρα Α έχουμε:

$$F_A = \begin{cases} 0 & , \quad t < t_1 \\ \alpha_1 t + \beta_1 & , \quad t_1 \le t < t_2 \\ \alpha_2 + \beta_2 t & , \quad t_2 \le t < t_2' \\ 0 & , \quad t_2' \le t \end{cases}$$

Όπου οι σταθερές α_1, α_2, β_1 και β_2 πρέπει να προσδιοριστούν.
Συγκεκριμένα είναι

$0 = \alpha_1 t_1 + \beta_1$

$$-F_o = \alpha_1 t_2 + \beta_1$$

Λύνουμε το σύστημα και βρίσκουμε:

$$\alpha_1 = -625\frac{N}{s} \text{ και } \beta_1 = 4531{,}25N.$$

Ομοίως έχουμε:

$-F_o = \alpha_2 t_2 + \beta_2$

$$0 = \alpha_2 t_2' + \beta_2$$

Λύνοντας βρίσκουμε:

$$\alpha_2 = 625\frac{N}{s} \text{ και } \beta_2 = -4731{,}25N.$$

Καταλήγουμε λοιπόν στη συνάρτηση:

$$F_A = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ -625t + 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 625t - 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε:

$$F_B = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ 625t - 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -625t + 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 < t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

Από τις συναρτήσεις αυτές προκύπτουν οι συναρτήσεις επιτάχυνσης των δύο σφαιρών:

http://micro-kosmos.uoa.gr

$$\alpha_A = \frac{F_A}{m} = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ -625t + 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 625t - 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

και:

$$\alpha_B = \frac{F_B}{m} = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ 625t - 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -625t + 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

Οι συναρτήσεις ταχύτητας προκύπτουν με ολοκλήρωση των συναρτήσεων αυτών:

$$v_A = \begin{cases} v_{0A} & , \quad t < 7{,}25 \\ -312{,}5t^2 + 4531{,}25t + \gamma_{A1} & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 312{,}5t^2 - 4731{,}25t + \gamma_{A2} & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ -v_{0B} & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

Οι σταθερές ολοκλήρωσης γ_{A1} και γ_{A2} προκύπτουν από την απαίτηση της συνέχειας των συναρτήσεων αυτών:

$$v_A = \begin{cases} 10 & , \quad t < 7{,}25 \\ -312{,}5t^2 + 4531{,}25t - 16415{,}8 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 312{,}5t^2 - 4731{,}25t + 17901{,}78 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ -6 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

και:

$$v_B = \begin{cases} -6 & , \quad t < 7{,}25 \\ 312{,}5t^2 - 4531{,}25t + 16419{,}78 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -312{,}5t^2 + 4731{,}25t - 17897{,}8 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 10 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

Με δεύτερη ολοκλήρωση έχουμε τις συναρτήσεις θέσης των δύο σφαιρών:

$$x_A = \begin{cases} 10t & , \quad t < 7{,}25 \\ -104{,}167t^3 + 2265{,}625t^2 - 16415{,}8t + 39695{,}64 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 104{,}167t^3 - 2365{,}63t^2 + 17901{,}78t - 45068{,}7 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 73{,}14 - 6(t - 7{,}57) & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

και:

$$x_B = \begin{cases} 120 - 6t & , \quad t < 7{,}25 \\ 104{,}167t^3 - 2265{,}63t^2 + 16419{,}78t - 39575{,}6 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -104{,}167t^3 + 2365{,}625t^2 - 17097{,}8t + 45100{,}74 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 77{,}14 + 10(t - 7{,}57) & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

γ) Το αποτέλεσμα V=2m/s του ερωτήματος **2γ** συνεχίζει να ισχύει. Λύνοντας την εξίσωση $v_A = V$ (ή $v_B = V$), βρίσκουμε $t_3^{'} = t_2 = 7{,}41s$.

Οπότε

$x_{A3}^{'} \approx 73{,}67m$

και:

$x_{B3}^{'} \approx 75{,}97m$

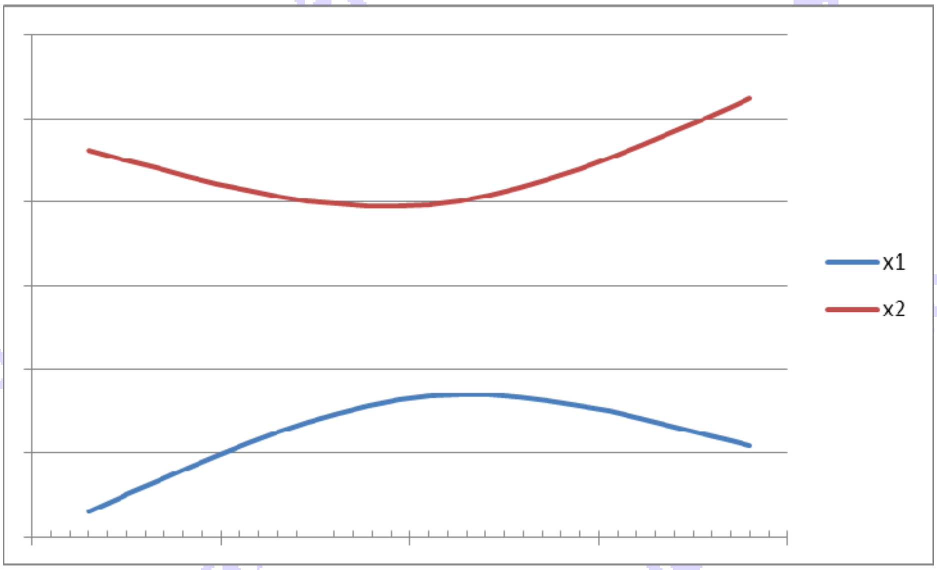
Άρα η ελάχιστη απόσταση των κέντρων θα είναι $\Delta x_{min}^{'} = x_{B3}^{'} - x_{A3}^{'} \approx 2{,}3m$

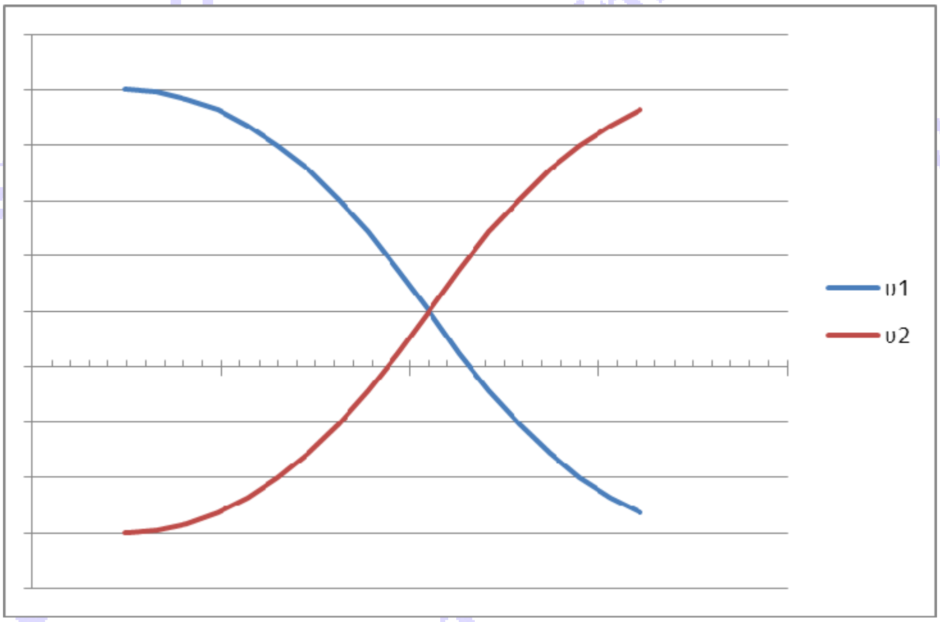
δ) Το αποτέλεσμα $U_{OA} \approx 14{,}27J$ του ερωτήματος **2δ** συνεχίζει να ισχύει.

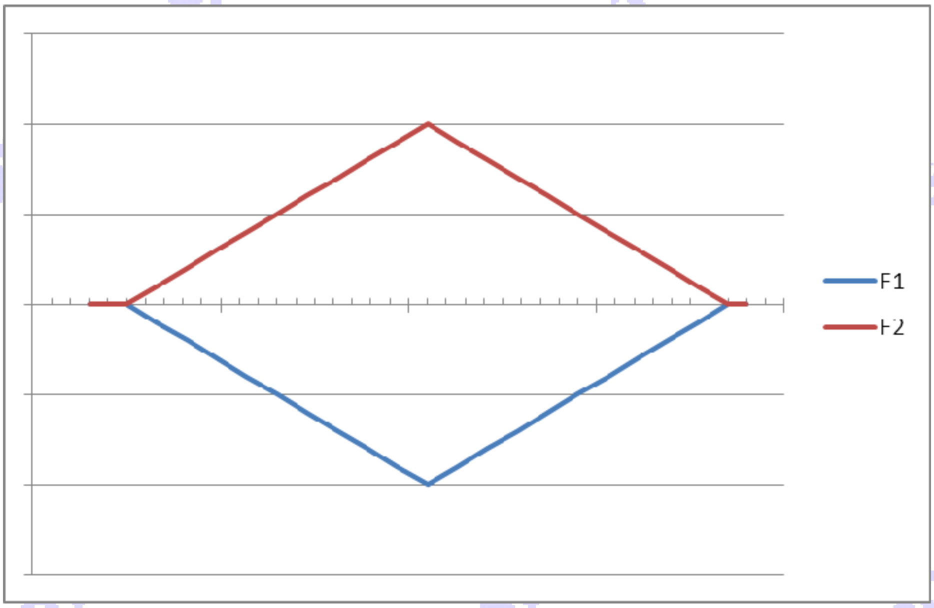
Τώρα όμως είναι $\Delta r'_{OA} = 2R - \Delta x'_{min} = (4 - 2{,}3)m = 1{,}7m$

Άρα $k = \frac{U_{OA}}{\left(\frac{\Delta r'_{OA}}{2}\right)^2} \Rightarrow k \approx \frac{14{,}27}{\left(\frac{1{,}7}{2}\right)^2} N/m \Rightarrow k \approx 19{,}75 N/m$

ε) Τα ζητούμενα διαγράμματα είναι:







Θέμα 3ο

1. Το φορτίο q ως αρνητικό θα δέχεται δύναμη αντίθετης φοράς από την ένταση της γραμμικής κατανομής θετικού φορτίου. Επομένως, σύμφωνα με τα χαρακτηριστικά i) και ii) της έντασης αυτής, προκύπτει ότι το φορτίο q θα δέχεται ηλεκτρική δύναμη προς τα δεξιά σε κάθε σημείο x. Η δύναμη αυτή έχει μέτρο: $F_{ΗΛ}=qE=K_{ΗΛ}\dfrac{2q\lambda}{r}$, όπου r η απόσταση του q από την ε.

Προκειμένου να υπάρχει σημείο όπου η συνολική δύναμη μηδενίζεται θα πρέπει το ελατήριο να ασκεί δύναμη προς τα αριστερά, δηλαδή το ελατήριο θα πρέπει στη θέση αυτή να έχει επιμηκυνθεί. Η επιμήκυνση θα είναι x_0 και η δύναμη του ελατηρίου θα έχει μέτρο: $F_{ΕΛ}=Kx_0$. Στη θέση αυτή η απόσταση του φορτίου q από την ε θα είναι $r=L–x_0$, οπότε για την ισορροπία:

$\Sigma F=0 \Rightarrow F_{ΗΛ} - Kx_0 = 0 \Rightarrow K_{ΗΛ}\dfrac{2q\lambda}{L-x_0}-Kx_0=0$ (1) $\Rightarrow K_{ΗΛ}2q\lambda - Kx_0(L-x_0)=0 \Rightarrow$ $\dfrac{K_{ΗΛ}2q\lambda}{K}-x_0(L-x_0)=0$ (2). Θέτουμε $\dfrac{K_{ΗΛ}2q\lambda}{K}=\gamma$ (3) και η (2) γίνεται: $x_0^{\,2}-Lx_0+\gamma=0$ (4). Η (4) είναι εξίσωση β΄ βαθμού ως προς x_0 με διακρίνουσα $\Delta=L^2–4\gamma$ (5). Για να έχει 2 λύσεις πρέπει $\Delta > 0 \Rightarrow L^2-\dfrac{8K_{ΗΛ}q\lambda}{K}>0$ (6). Σε αυτήν την περίπτωση οι ρίζες είναι:

$$x_{01}=\frac{1}{2}\left(L-\sqrt{L^2-4\gamma}\right)\Rightarrow x_{01}=\frac{1}{2}\left(L-\sqrt{L^2-\frac{8K_{ΗΛ}q\lambda}{K}}\right) \quad (7)$$

$$x_{02}=\frac{1}{2}\left(L+\sqrt{L^2-4\gamma}\right)\Rightarrow x_{02}=\frac{1}{2}\left(L+\sqrt{L^2-\frac{8K_{ΗΛ}q\lambda}{K}}\right) \quad (8).$$

Προφανώς $x_{01} < x_{02}$, ενώ $0 < x_{01}$ και $x_{02} < L \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(L+\sqrt{L^2-4\gamma}\right)<L \Leftrightarrow L+\sqrt{L^2-4\gamma}<2L \Leftrightarrow$ $L+\sqrt{L^2-4\gamma}<2L \Leftrightarrow \sqrt{L^2-4\gamma}<L \Leftrightarrow L^2-4\gamma<L^2 \Leftrightarrow L^2-4\gamma<L^2 \Leftrightarrow -4\gamma<0$ που ισχύει. Δηλαδή και οι δύο ρίζες βρίσκονται στο διάστημα $(0,L)$.

2. Για να εξετάσουμε την ευστάθεια των σημείων ισορροπίας θεωρούμε μία μικρή μετατόπιση Δx από το σημείο ισορροπίας x_{0i}, i=1,2. Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση της υπόδειξης, η συνολική δύναμη που δέχεται τότε το φορτίο q θα είναι:

$$\Sigma F_i = F_{H\Lambda i} - F_{E\Lambda i} = K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}-\Delta x} - K(x_{0i}+\Delta x) = K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{(L-x_{0i})\left(1-\dfrac{\Delta x}{L-x_{0i}}\right)} - Kx_{0i} - K\Delta x =$$

$$= K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}}\left(1-\frac{\Delta x}{L-x_{0i}}\right)^{-1} - Kx_{0i} - K\Delta x \cong K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}}\left(1+\frac{\Delta x}{L-x_{0i}}\right) - Kx_{0i} - K\Delta x =$$

$$= K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}} - Kx_{0i} + K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}}\frac{\Delta x}{L-x_{0i}} - K\Delta x = K_{H\Lambda}\frac{2q\lambda}{L-x_{0i}} - Kx_{0i} - \left[K - \frac{K_{H\Lambda}2q\lambda}{(L-x_{0i})^2}\right]\Delta x .$$

Δεδομένου ότι οι θέσεις των σημείων ισορροπίας ικανοποιούν την (1) θα έχουμε:

$$\Sigma F_i = -\left[K - \frac{K_{H\Lambda}2q\lambda}{(L-x_{0i})^2}\right]\Delta x ,\ i=1,2 \quad (9).$$

Κάνοντας πάλι χρήση της (1), η (9) δίνει:

$$\Sigma F_i = -\left(K - \frac{K_{H\Lambda}2q\lambda}{L-x_{0i}}\frac{1}{L-x_{0i}}\right)\Delta x = -\left(K - Kx_{0i}\frac{1}{L-x_{0i}}\right)\Delta x = -K\left(1-\frac{x_{0i}}{L-x_{0i}}\right)\Delta x$$

$$= -K\frac{L-x_{0i}-x_{0i}}{L-x_{0i}}\Delta x = = -\frac{K}{L-x_{0i}}(L-2x_{0i})\Delta x \quad (10).$$

Αλλά επειδή, σύμφωνα με το προηγούμενο ερώτημα οι ρίζες είναι μικρότερες από L, $L - x_{0i} > 0$. Έτσι το πρόσημο της συνισταμένης δύναμης, όταν το φορτίο απομακρυνθεί κατά Δx από τη θέση ισορροπίας του, θα καθορίζεται από την ποσότητα $L - 2x_{0i}$. Σύμφωνα με τις (7) και (8):

$$L - 2x_{01} = L-\frac{2}{2}\left(L-\sqrt{L^2-4\gamma}\right) = L-L+\sqrt{L^2-4\gamma} = \sqrt{L^2-4\gamma} > 0$$

$$L - 2x_{02} = L-\frac{2}{2}\left(L+\sqrt{L^2-4\gamma}\right) = L-L-\sqrt{L^2-4\gamma} = -\sqrt{L^2-4\gamma} < 0$$

Έτσι: $\Sigma F_1 = -\dfrac{K\sqrt{L^2-4\gamma}}{L-x_{01}}\Delta x = -\dfrac{2K\sqrt{L^2-4\gamma}}{L+\sqrt{L^2-4\gamma}}\Delta x = -A_1\Delta x$ (11) με $A_1 > 0$. Επομένως <u>η συνισταμένη δύναμη είναι πάντοτε αντίθετης φοράς από την απομάκρυνση Δx</u>, οπότε τείνει να επαναφέρει το φορτίο στη θέση ισορροπίας του x_{01}. Αυτό το σημείο ισορροπίας είναι <u>**ευσταθές**</u>. Επειδή η συνισταμένη δύναμη για μικρές απομακρύνσεις, σύμφωνα με την (11), είναι ανάλογη με την απομάκρυνση και αντίθετης φοράς από αυτήν, το σώμα αν εκτραπεί γύρω από την θέση ισορροπίας x_{01}, θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

Και: $\Sigma F_2 = \dfrac{K\sqrt{L^2-4\gamma}}{L-x_{02}}\Delta x = \dfrac{2K\sqrt{L^2-4\gamma}}{L-\sqrt{L^2-4\gamma}}\Delta x = A_2\Delta x$ (12) με $A_2 > 0$. Επομένως <u>η συνισταμένη δύναμη έχει πάντοτε την ίδια φορά με την απομάκρυνση Δx</u>, οπότε τείνει να απομακρύνει το φορτίο από τη θέση ισορροπίας του x_{02}. Αυτό το σημείο ισορροπίας είναι <u>**ασταθές**</u>. Αν το φορτίο εκτραπεί από αυτή τη θέση προς τα δεξιά, τότε θα συνεχίσει να κινείται προς τη γραμμική κατανομή θετικού φορτίου. Αν το φορτίο εκτραπεί από τη θέση x_{02} προς τα αριστερά, τότε θα συνεχίσει να κινείται προς τη θέση ισορροπίας x_{01}.

3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα το φορτίο θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση για μικρές απομακρύνσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας x_{01}. Για να υπάρχει, βέβαια, τέτοιο σημείο θα πρέπει να ισχύει η (6). Τότε, σύμφωνα με την (11):

$$D = A_1 = \frac{2K\sqrt{L^2-4\gamma}}{L+\sqrt{L^2-4\gamma}} = \frac{2K\sqrt{L^2-\dfrac{8K_{\text{ΗΛ}}q\lambda}{K}}}{L+\sqrt{L^2-\dfrac{8K_{\text{ΗΛ}}q\lambda}{K}}} \quad (12).$$

4. Η συνθήκη για να υπάρχουν δύο σημεία ισορροπίας είναι η (6). Αν δεν ισχύει υπάρχουν 2 περιπτώσεις:

α) Να ισχύει: $\Delta < 0 \Rightarrow L^2 – 4\gamma < 0 \Rightarrow L^2 - \dfrac{8K_{\text{ΗΛ}}q\lambda}{K} < 0$ (13). Τότε δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας. Επιπρόσθετα η συνισταμένη δύναμη σε τυχαίο σημείο x θα είναι:

$$\Sigma F = K_{\text{ΗΛ}}\frac{2q\lambda}{L-x} - Kx = \frac{K_{\text{ΗΛ}}2q\lambda - Kx(L-x)}{(L-x)} = \frac{\gamma - x(L-x)}{K(L-x)} = \frac{x^2 - Lx + \gamma}{K(L-x)} \quad (14).$$

Επειδή $K > 0$ και $L – x > 0$, προκύπτει ότι το πρόσημο της συνισταμένης δύναμης θα είναι ίδιο με αυτό της ποσότητας $x^2 – Lx + \gamma$. Όμως, λόγω της (13), το πρόσημο αυτό ταυτίζεται με το πρόσημο του συντελεστή του x^2 που είναι θετικό. Συνεπώς, όταν ισχύει η (13), έχουμε $\Sigma F > 0$ σε κάθε σημείο x. Αν το φορτίο αφεθεί σε οποιοδήποτε σημείο, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα κινηθεί προς τα **δεξιά**.

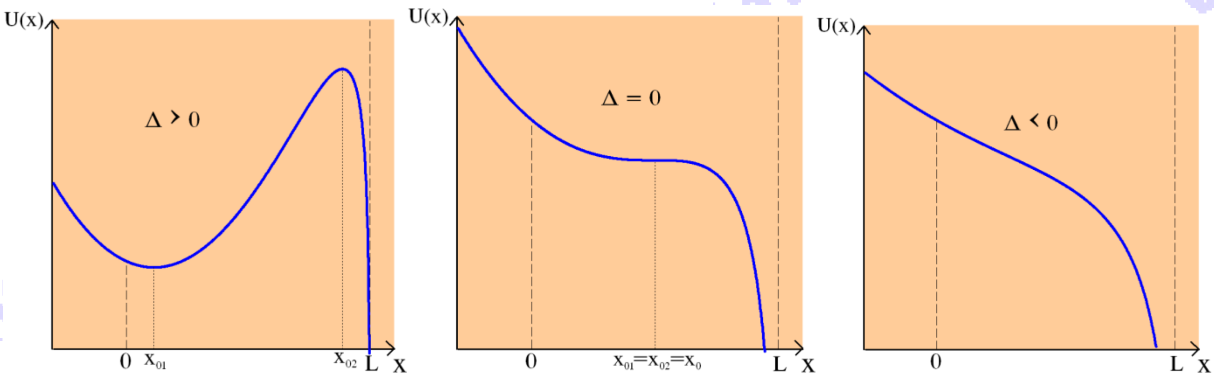
β) Να ισχύει: $\Delta = 0 \Rightarrow L^2 – 4\gamma = 0 \Rightarrow L^2 - \dfrac{8K_{\text{ΗΛ}}q\lambda}{K} = 0$ (15). Τότε υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας, μία διπλή ρίζα στην εξίσωση (4), που σύμφωνα από τις (7) και (8) θα είναι:

http://micro-kosmos.uoa.gr

$$x_0 = \frac{L}{2} \quad (16).$$

Ο υπολογισμός (14) για τη συνισταμένη δύναμη ισχύει και εδώ. Επειδή $K > 0$ και $L - x > 0$, προκύπτει ότι το πρόσημο της συνισταμένης δύναμης θα είναι ίδιο με αυτό της ποσότητας $x^2 - Lx + \gamma$. Όμως, λόγω της (15), το πρόσημο αυτό ταυτίζεται με το πρόσημο του συντελεστή του x^2 που είναι θετικό σε όλες τις περιπτώσεις, εκτός αν $x=x_0$, οπότε είναι η εν λόγω ποσότητα μηδενίζεται. Συνεπώς, όταν ισχύει η (15), έχουμε $\Sigma F > 0$ σε κάθε σημείο $x \neq x_0$. Αν το φορτίο αφεθεί σε ένα τέτοιο σημείο, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα κινηθεί προς τα **δεξιά**. Στο σημείο $x=x_0$ θα έχουμε $\Sigma F = 0$ και αν το φορτίο αφεθεί στο σημείο αυτό, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα παραμείνει **ακίνητο**.

Σημείωση στη Λύση



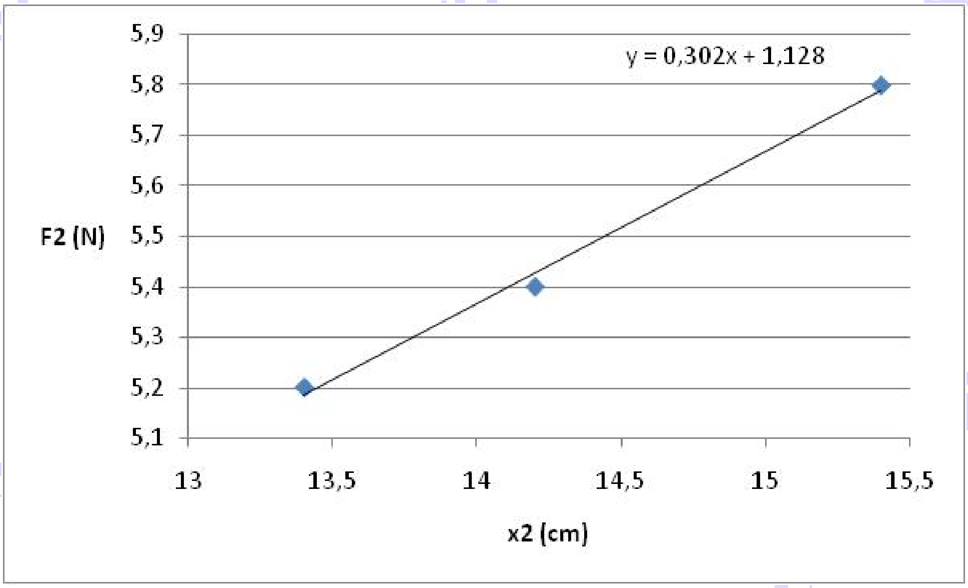
Το εξεταζόμενο σύστημα χαρακτηρίζεται από συνολική δυναμική ενέργεια U(x) που απεικονίζεται στα παραπάνω διαγράμματα για τις διάφορες περιπτώσεις της ποσότητας $\Delta = L^2 - 4\gamma = L^2 - \dfrac{8K_{H\Lambda} q\lambda}{K}$. Οι 2 λύσεις για τις θέσεις ισορροπίας (Δ>0) αντιστοιχούν στα δύο τοπικά ακρότατα της δυναμικής ενέργειας, σε ένα τοπικό ελάχιστο (ευσταθής ισορροπία) και σε ένα τοπικό μέγιστο (ασταθής ισορροπία). Στην περίπτωση της μίας διπλής λύσης (Δ=0) η μορφή της δυναμικής ενέργειας φαίνεται στο δεύτερο διάγραμμα, όπου τα δύο ακρότατα έχουν συμπέσει στο ίδιο σημείο x_0. Η μορφή της δυναμικής ενέργειας όταν δεν έχει κανένα τοπικό ακρότατο (Δ<0) φαίνεται στο τρίτο διάγραμμα.

Πειραματικό Μέρος

Α. Οι ζητούμενες τιμές φαίνονται στον πίνακα με έντονη γραφή. Από την ισορροπία των δυνάμεων έχουμε $F_2=F_1+mg$. Για την επιμήκυνση x_2 ισχύει $x_2 = \ell - \delta - x_1 - \ell_1 - \ell_2$.

Μάζα m (g)	200	300	500
Διάσταση της μάζας δ (cm)	9,2	9,2	9,6
Επιμήκυνση μπλε x_1 (cm)	3,2	2,4	0,8
Δύναμη F_1 μπλε ελατηρίου (N)	**3,2**	**2,4**	**0,8**
Δύναμη F_2 γκρι ελατηρίου (N)	**5,2**	**5,4**	**5,8**
Επιμήκυνση γκρι x_2 (cm)	**13,4**	**14,2**	**15,4**

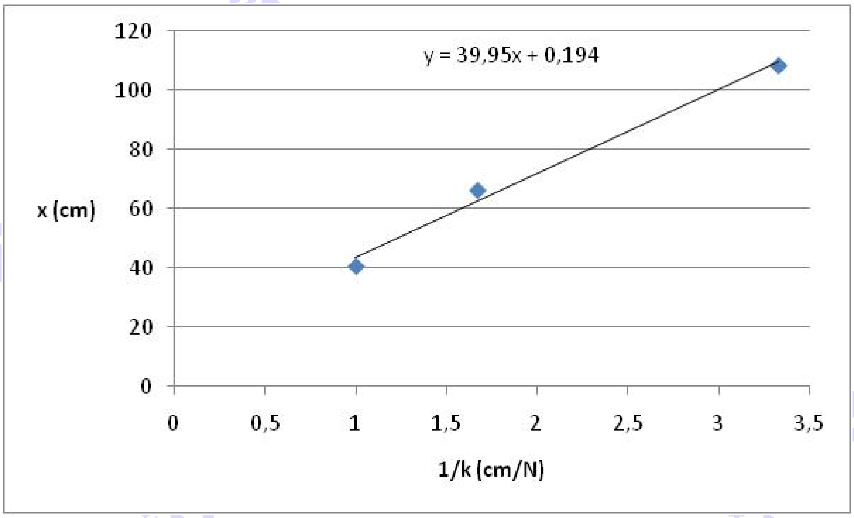
Α1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η $F_2=f(x_2)$ που προκύπτει ευθεία, από τις τιμές του πίνακα:



Α2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής περίπου ίσο προς k=0,30N/cm.

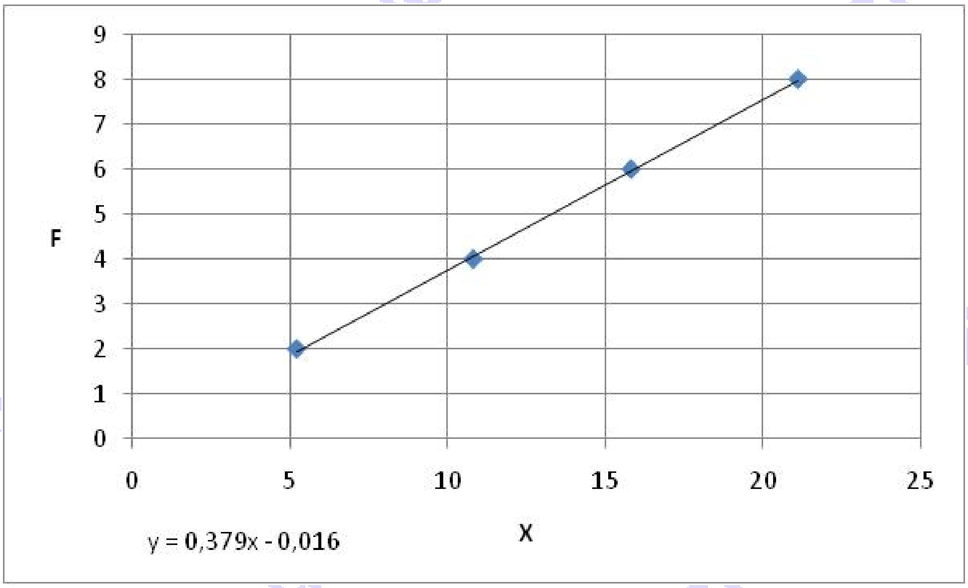
Β1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η x=f(1/k) που προκύπτει ευθεία, από τις τιμές:

1/k	x
2,70	108,40
1,67	66,20
1,00	40,50



Β2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής ίσο προς mg=39,95 N. Άρα η άγνωστη μάζα προκύπτει περίπου ίση προς m=4 kg.

Γ1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η F=f(x) που προκύπτει ευθεία, από τις τιμές του πίνακα:



Γ2. Εφαρμόζοντας τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων βρίσκουμε το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας αυτής ίσο προς $k_{ολ}$=0,379 N/cm.

Όπως μπορούμε να αποδείξουμε (από τη σύνθεση δυνάμεων) στην παράλληλη σύνδεση προκύπτει $k_{ολ,π} = k_1 + k_2$, ενώ στην κατά σειρά σύνδεση $k_{ολ,σ} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$.

Από τις γνωστές τιμές των σταθερών των δύο ελατηρίων βρίσκουμε $k_{ολ,π} = 1{,}6 N/cm$, ενώ $k_{ολ,σ} = 0{,}375 N/cm$. Προφανώς λοιπόν μέσα στο αδιαφανές δυναμόμετρο τα ελατήρια έχουν συνδεθεί *σε σειρά*.

Γ΄ Λυκείου - Β΄ Φάση
ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος
Θέμα 1ο

A1. $U = Kq^2\left(-\frac{2}{r} + \frac{2}{\sqrt{r^2 + d^2}}\right)$

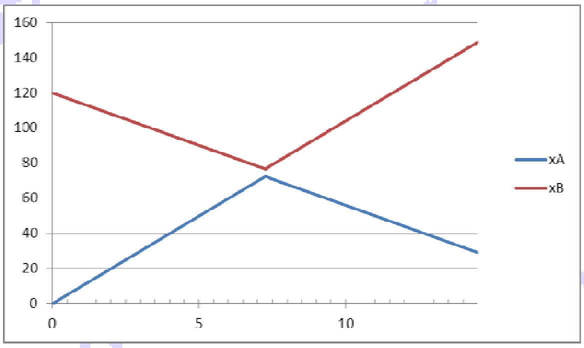
A2. $U \approx -K\frac{q^2 \cdot d^2}{r^3}$

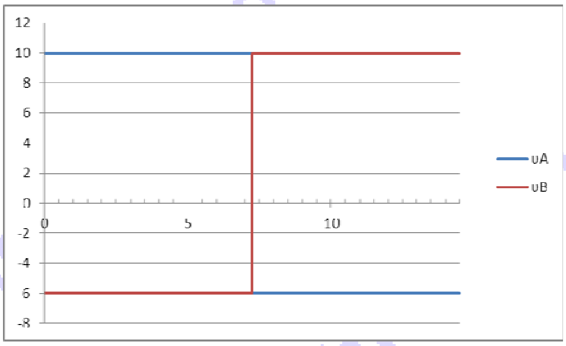
B. $\upsilon_{\sigma\chi\varepsilon\tau}=0,9988c$

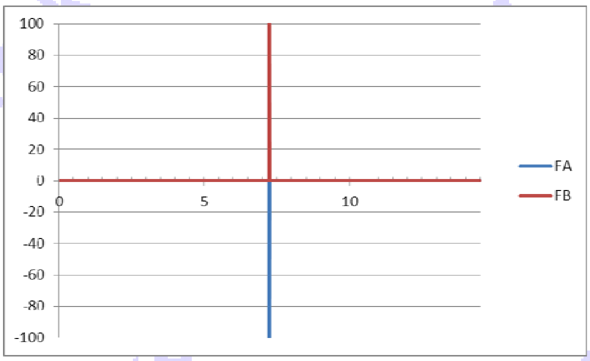
Θέμα 2ο
1)

α) $t_1=7,25s$

β) $x_1=72,5m$, $x_2=76,5m$

γ)


δ)


ε)


στ)
Γράφημα ταχυτήτων
Παρατηρούμε ότι η γραφική παράσταση της ταχύτητας κάθε σώματος παρουσιάζει μια ασυνέχεια τη στιγμή t_1, συμπεριφορά που προφανώς δεν είναι ρεαλιστική, αλλά εξιδανικευμένη, αφού η ταχύτητα ενός σώματος δε μπορεί να μεταβάλλεται ακαριαία.
Γράφημα Δυνάμεων

Από το θεμελιώδη Νόμο της Δυναμικής γνωρίζουμε ότι $F \cdot \Delta t = \Delta P = m \cdot \Delta \upsilon$, που, γραφικά, αποδίδεται από το εμβαδό που ορίζεται από τη γραφική παράσταση. Δεδομένου ότι η μεταβολή ταχύτητας (ορμής) κάθε σώματος είναι μη μηδενική ενώ $\Delta t=0$, καταλήγουμε σε μια “ιδιόμορφη” συνάρτηση δύναμης που απειρίζεται για $t=t_1$ και είναι 0 για κάθε άλλη στιγμή, περικλείοντας μη μηδενικό εμβαδό.

2)

α) $\Delta t=0{,}16s$

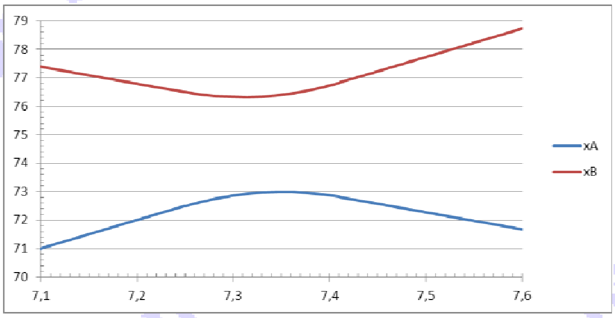
β) $\upsilon_{1min}=0$ m/s , $t_{\mu\eta\delta,1}=7{,}35s$, $\upsilon_{2min}=0$ m/s , $t_{\mu\eta\delta,2}=7{,}31s$

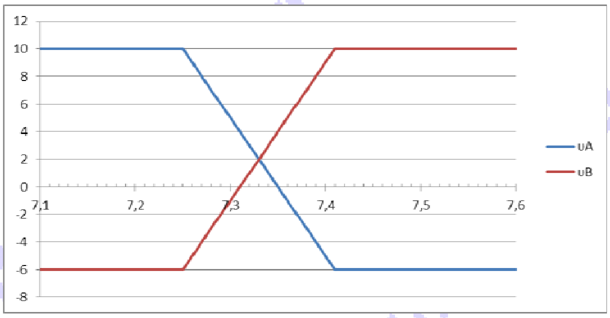
Παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες των σφαιρών ΔΕ μηδενίζονται την ίδια στιγμή. Προηγείται ο μηδενισμός της ταχύτητας της σφαίρας που έχει τη μικρότερη κατά μέτρο ταχύτητα, γεγονός αναμενόμενο, αφού οι δύο σφαίρες δέχονται ίσες δυνάμεις (Τρίτος Νόμος του Newton) και έχουν ίσες μάζες, δηλαδή υφίστανται ίσες κατά μέτρο επιταχύνσεις.

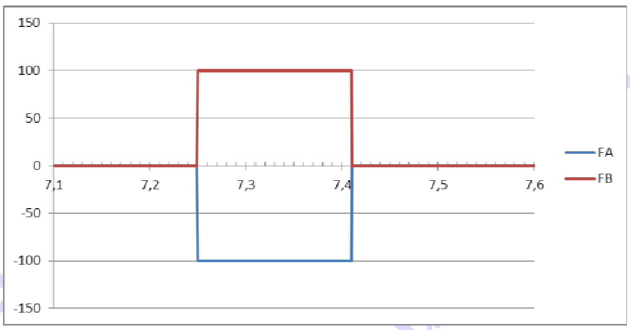
γ) $\Delta x_{min}=3{,}36m$

δ) $k \approx 139N/m$

ε)







3)

α) $\Delta t'=0{,}32s$

Αν αντί της σταθερής δύναμης, θεωρήσουμε γραμμική εξάρτηση ως προς το χρόνο, το γράφημα της F=f(t) θα είναι τρίγωνο ισεμβαδικό με το σχήμα του ερωτήματος **2ε.** και μάλιστα ισοσκελές αφού γνωρίζουμε ότι η δύναμη μεταβάλλεται με τον ίδιο ρυθμό τόσο κατά την αύξηση όσο και κατά τη μείωση της τιμής της. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η βάση του τριγώνου θα είναι διπλάσια της βάσης του παραλληλογράμμου

β) $$F_A = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ -625t + 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 625t - 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

$$F_B = \begin{cases} 0 & , \quad t < 7{,}25 \\ 625t - 4531{,}25 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -625t + 4731{,}25 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 0 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

$$v_A = \begin{cases} 10 & , \quad t < 7{,}25 \\ -312{,}5t^2 + 4531{,}25t - 16415{,}8 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 312{,}5t^2 - 4731{,}25t + 17901{,}78 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ -6 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

$$v_B = \begin{cases} -6 & , \quad t < 7{,}25 \\ 312{,}5t^2 - 4531{,}25t + 16419{,}78 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -312{,}5t^2 + 4731{,}25t - 17897{,}8 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 10 & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

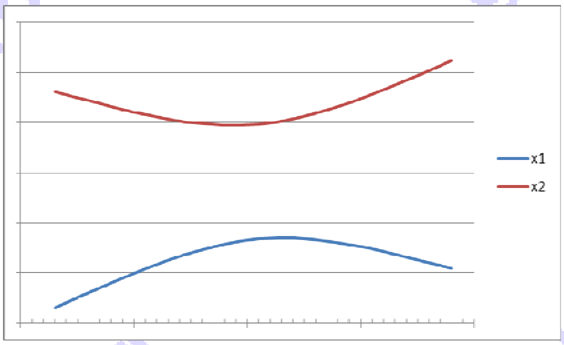
$$x_A = \begin{cases} 10t & , \quad t < 7{,}25 \\ -104{,}167t^3 + 2265{,}625t^2 - 16415{,}8t + 39695{,}64 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ 104{,}167t^3 - 2365{,}63t^2 + 17901{,}78t - 45068{,}7 & , \quad 7{,}41 \le t < 7{,}57 \\ 73{,}14 - 6(t - 7{,}57) & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

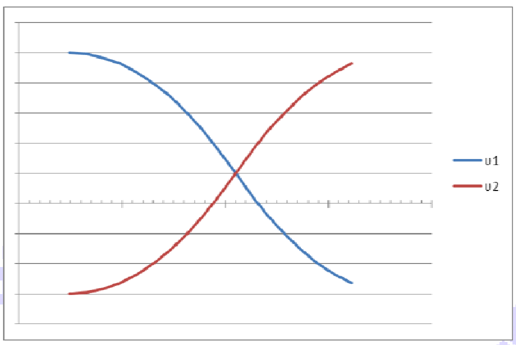
$$x_B = \begin{cases} 120 - 6t & , \quad t < 7{,}25 \\ 104{,}167t^3 - 2265{,}63t^2 + 16419{,}70t - 39575{,}6 & , \quad 7{,}25 \le t < 7{,}41 \\ -104{,}167t^3 + 2365{,}625t^2 - 17897{,}8t + 45188{,}74 & , \quad 7{,}41 < t < 7{,}57 \\ 77{,}14 + 10(t - 7{,}57) & , \quad 7{,}57 \le t \end{cases} \quad (S.I.)$$

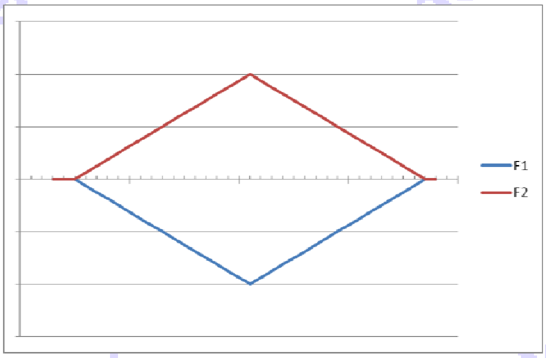
γ) $\Delta x'_{min} \approx 2{,}3m$

δ) $k \approx 19{,}75 N/m$

ε)







Θέμα 3ο

1. $x_{01} = \frac{1}{2}\left(L - \sqrt{L^2 - 4\gamma}\right) \Rightarrow x_{01} = \frac{1}{2}\left(L - \sqrt{L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K}}\right)$

$x_{02} = \frac{1}{2}\left(L + \sqrt{L^2 - 4\gamma}\right) \Rightarrow x_{02} = \frac{1}{2}\left(L + \sqrt{L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K}}\right)$

Προφανώς $x_{01} < x_{02}$, ενώ $0 < x_{01}$ και $x_{02} < L \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left(L + \sqrt{L^2 - 4\gamma}\right) < L \Leftrightarrow L + \sqrt{L^2 - 4\gamma} < 2L \Leftrightarrow$ $L + \sqrt{L^2 - 4\gamma} < 2L \Leftrightarrow \sqrt{L^2 - 4\gamma} < L \Leftrightarrow L^2 - 4\gamma < L^2 \Leftrightarrow L^2 - 4\gamma < L^2 \Leftrightarrow -4\gamma < 0$ που ισχύει. Δηλαδή και οι δύο ρίζες βρίσκονται στο διάστημα $(0, L)$.

2.

Το x_{01} είναι *ευσταθές*.

Το x_{02} είναι *ασταθές*

3. Το φορτίο μπορεί να εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση για μικρές απομακρύνσεις γύρω από το ευσταθές σημείο ισορροπίας x_{01}. Για να υπάρχει, βέβαια, τέτοιο σημείο θα πρέπει να ισχύει $L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K} > 0$.

$$D = \frac{2K\sqrt{L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K}}}{L + \sqrt{L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K}}}$$

4.

α. Αν $L^2 - \frac{8K_{HΛ}q\lambda}{K} < 0$, τότε δεν υπάρχει κανένα σημείο ισορροπίας. Και έχουμε $\Sigma F > 0$ σε κάθε σημείο x. Αν το φορτίο αφεθεί σε οποιοδήποτε σημείο, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα κινηθεί προς τα *δεξιά*.

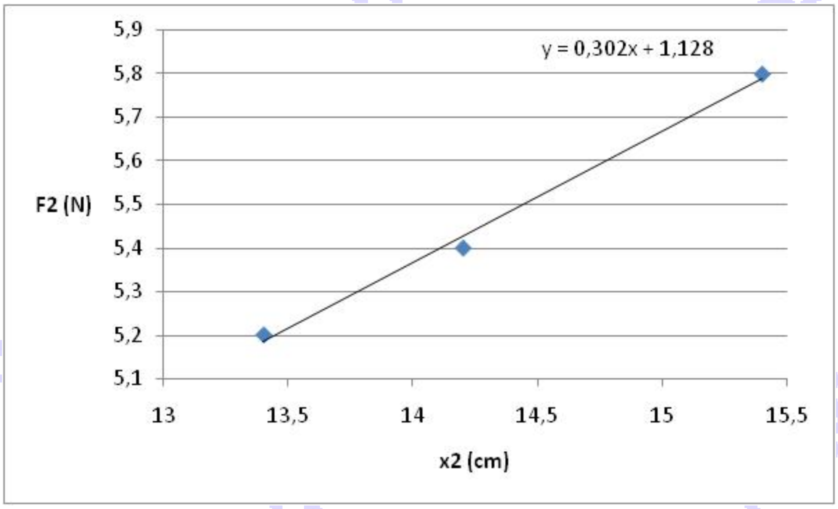
β. Αν $L^2 - \frac{8K_{ΗΛ}q\lambda}{K} = 0$ τότε Σ*F* > 0 σε κάθε σημείο $x \neq x_0$ και υπάρχει ένα σημείο ισορροπίας στη θέση $x_0 = \frac{L}{2}$. Αν το φορτίο αφεθεί σε $x \neq x_0$, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα κινηθεί προς τα *δεξιά*. Στο σημείο $x=x_0$ θα έχουμε Σ*F* = 0 και αν το φορτίο αφεθεί στο σημείο αυτό, χωρίς αρχική ταχύτητα, θα παραμείνει *ακίνητο*.

Πειραματικό Μέρος

Α.

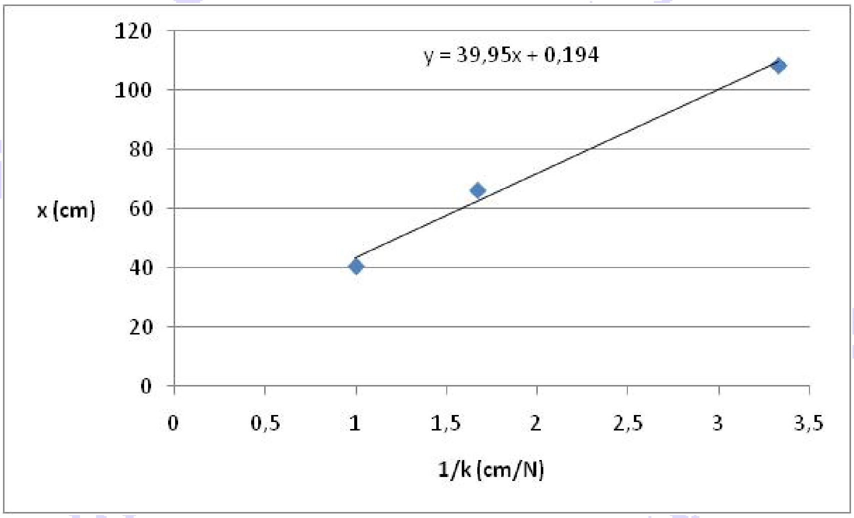
Δύναμη F_1 μπλε ελατηρίου (N)	**3,2**	**2,4**	**0,8**
Δύναμη F_2 γκρι ελατηρίου (N)	**5,2**	**5,4**	**5,8**
Επιμήκυνση γκρι x_2 (cm)	**13,4**	**14,2**	**15,4**

Α1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η $F_2=f(x_2)$



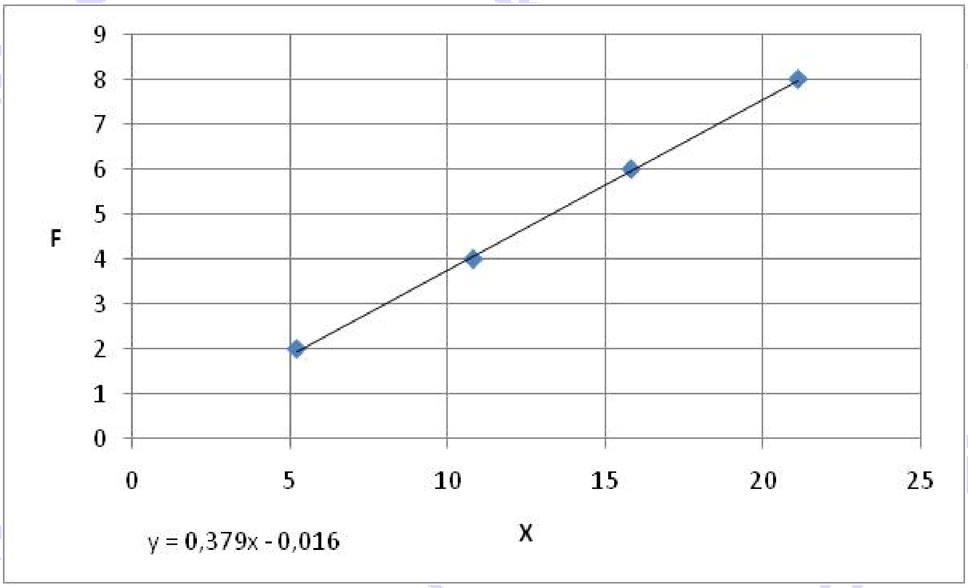
Α2. k=0,30N/cm

Β1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η x=f(1/k) (ευθεία)



Β2. m≈4kg.

Γ1. Η κατάλληλη γραφική παράσταση είναι η F=f(x) (ευθεία)



Γ2. Τρόπος σύνδεσης: *σε σειρά*

http://micro-kosmos.uoa.gr