Γ΄ Λυκείου

18 Απριλίου 2015

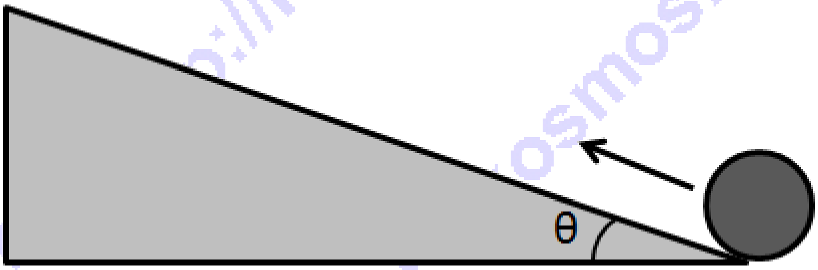
ΟΔΗΓΙΕΣ:

1. Η επεξεργασία των θεμάτων θα γίνει γραπτώς σε χαρτί Α4 ή σε τετράδιο που θα σας δοθεί (το οποίο θα παραδώσετε στο τέλος της εξέτασης). Εκεί θα σχεδιάσετε και όσα γραφήματα ζητούνται στο **Θεωρητικό Μέρος**.
2. Τα γραφήματα του **Πειραματικού Μέρους** θα τα σχεδιάσετε *κατά προτεραιότητα* στο μιλιμετρέ χαρτί που συνοδεύει τις εκφωνήσεις.
3. Οι απαντήσεις στα υπόλοιπα ερωτήματα τόσο του **Θεωρητικού Μέρους** όσο και του **Πειραματικού** θα πρέπει *οπωσδήποτε* να συμπληρωθούν στο *“Φύλλο Απαντήσεων”* που θα σας δοθεί μαζί μετις εκφωνήσεις των θεμάτων.

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1^{o}

Α. Σώμα εκτοξεύεται από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου γωνίας θ=30^{o} με ταχύτητα παράλληλη προς την επιφάνεια του κ. επιπέδου (βλ. σχήμα).

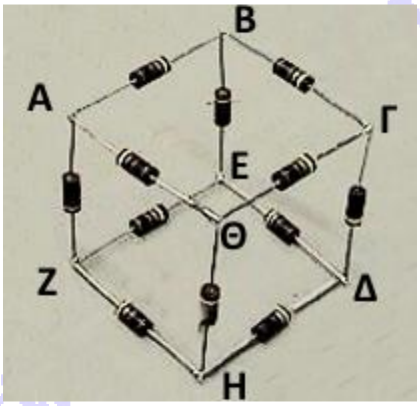


Α1. Να βρείτε μια έκφραση των τιμών του συντελεστή τριβής μεταξύ του σώματος και του κ. επιπέδου, για τις οποίες το σώμα εκτελεί, κατά την άνοδό του, ολίσθηση ταυτόχρονα με την κύλησή του.
Α2. Να εφαρμόσετε το αποτέλεσμά σας για την περίπτωση κυλικού δίσκου, του οποίου η ροπή αδράνειας είναι ίση προς $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Β. Ένα σπουργίτι συναντά κατά την πτήση του στον αέρα ($n_α$=1) μια διαφανή σφαίρα ακτίνας R=1m φτιαγμένη από υλικό με δείκτη διάθλασης $n = \sqrt{2}$. Στην άλλη πλευρά της σφαίρας περπατά μια μύγα. Υποθέστε το σπουργίτι απέχει από το κέντρο της σφαίρας απόσταση R+s, όπου $s = \frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}R$.
Β1. Σε κατάλληλο σχήμα να δείξετε τα σημεία της σφαίρας όπου πρέπει να βρίσκεται η μύγα ώστε να είναι ορατή από το σπουργίτι.
Β2. Να επιλέξετε τα κατάλληλα γεωμετρικά μεγέθη που σας επιτρέπουν να περιγράψετε τα σημεία αυτά με ακρίβεια και να προσδιορίσετε τις τιμές τους.

Θέμα 2^{o}

Στα περισσότερα εργαστήρια Φυσικής υπάρχει μια διάταξη σαν αυτή του διπλανού σχήματος, ένας κύβος που η κάθε ακμή του είναι ένας ηλεκτρικός αντιστάτης. Η τιμή της αντίστασης του κάθε αντιστάτη της διάταξης είναι ίση με 6 Ω.



Α. Ποια θα είναι η τιμή της αντίστασης $R_{ολ,1}$ που θα καταγράψει ένα ωμόμετρο αν το ένα του άκρο συνδεθεί στην κορυφή Α του κύβου και το άλλο στην κορυφή Δ;

Β. Ποια θα είναι η τιμή της αντίστασης $R_{ολ,2}$ που θα καταγράψει ένα ωμόμετρο αν το ένα του άκρο συνδεθεί στην κορυφή Α του κύβου και το άλλο στην κορυφή Β;

Θέμα 3ο

Υποθέστε πως ο κόσμος μας κυβερνάται από την Κλασική Μηχανική. Σε αυτό το «κλασικό» σύμπαν, μπορεί να προσπαθούσαμε να «χτίσουμε» ένα άτομο υδρογόνου με το να θέσουμε ένα ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά γύρω από ένα πρωτόνιο. Όμως, γνωρίζουμε ότι ένα μη-σχετικιστικό επιταχυνόμενο ηλεκτρικό φορτίο ακτινοβολεί ενέργεια με ρυθμό που δίνεται από τη σχέση του Larmor:

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{2}{3}\frac{q^2\alpha^2}{c^3} \quad \text{(Μονάδες cgs)}$$

Όταν χρησιμοποιούμε τις μονάδες cgs σημαίνει ότι μετράμε τις αποστάσεις σε cm, τις μάζες σε g και τις χρονικές διάρκειες σε sec.Σε αυτό το Σύστημα Μονάδων η σταθερά του ηλεκτρισμού $K_{ηλ}$ είναι αδιάστατη και έχει τιμή ίση με τη μονάδα.

όπου q είναι το ηλεκτρικό φορτίο, α το μέτρο της επιτάχυνσης και c η ταχύτητα του φωτός. Επομένως, το κλασικό άτομο έχει ένα εμφανές πρόβλημα σταθερότητας.

Α. Να δείξετε ότι η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο σε κάθε περιφορά του ηλεκτρονίου είναι μικρή σε σχέση με την κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου.

Αγνοείστε για αυτό το ερώτημα το γεγονός ότι το ηλεκτρόνιο θα πραγματοποιούσε μια σπειροειδή τροχιά.

Β. Χρησιμοποιείστε το τυπικό μέγεθος ενός ατόμου ($1\dot{A}=10^{-10}$m) και ενός ατομικού πυρήνα ($1\text{fm}=10^{-15}$m) και υπολογίστε τον χρόνο t_1 στον οποίο το ηλεκτρόνιο (του οποίου την τροχιά θα πρέπει τώρα να θεωρήσετε σπειροειδή) θα προσπέσει στο πρωτόνιο.

(Υπόδειξη: Η ακτίνα της τροχιάς του ηλεκτρονίου είναι συνάρτηση του χρόνου. Η επίλυση της διαφορικής εξίσωσης της μορφής $r^2 dr = σταθ\ dt$ επιτυγχάνεται αν ολοκληρώσουμε και τα δύο μέλη ως εξής: $\int_{r_{αρχ}}^{r_{τελ}} r^2 dr = σταθ \int_0^{t_1} dt$)

Γ. Θεωρώντας ότι το ηλεκτρόνιο κινείται σε κυκλική τροχιά γύρω από το πρωτόνιο ακτίνας 0,5 $\dot{A}$, να συγκρίνετε την ταχύτητα του με την ταχύτητα του φωτός υπολογίζοντας το λόγο $\frac{\upsilon}{c}$. Στη συνέχεια, να υπολογίσετε την ταχύτητα υ του ηλεκτρονίου λίγο πριν προσπέσει στον πυρήνα. Μπορεί να συμβεί αυτό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Δ. Καθώς το ηλεκτρόνιο πλησιάζει το πρωτόνιο, προς ποια τιμή τείνει η ενέργειά του E; Υπάρχει μια ελάχιστη τιμή ενέργειας που μπορεί να έχει το ηλεκτρόνιο;

Δίνονται οι τιμές της μάζας και του φορτίου του ηλεκτρονίου ίσες προς $m_e = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$ και $q_e = -1{,}6 \cdot 10^{-19} C$ αντίστοιχα.

Πειραματικό Μέρος

Σύμφωνα με την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας η συνολική ενέργεια και η ορμή ενός σωματιδίου το οποίο κινείται με σχετικιστικές ταχύτητες (ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός) δίνονται από τις σχέσεις:

$$E = K + m_o c^2 = \gamma m_o c^2 \quad (1)$$

$$p = \gamma m_o \upsilon \ (2)$$

$$\text{με} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}} \quad (3)$$

όπου m_o η μάζα ηρεμίας του σωματιδίου, υ η ταχύτητά του, K η κινητική του ενέργεια, p η ορμή του και E η ολική του ενέργεια.

Για τον πειραματικό υπολογισμό της ταχύτητας του φωτός, βασιζόμενοι στις σχετικιστικές εκφράσεις της ενέργειας και της ορμής, χρησιμοποιούμε μια πειραματική διάταξη με πηγή ακτινοβολίας β και ανιχνευτή που μετρά την ορμή και την κινητική ενέργεια των ηλεκτρονίων που εκπέμπει η πηγή.

Α. Αποδείξτε τη σχέση $K = \sqrt{(pc)^2 + (m_0 c^2)^2} - m_0 c^2$

Β. Ποια είναι η ταχύτητα υ σωματιδίου που έχει κινητική ενέργεια $K = m_0 c^2$.

Γ. Με βάση τον ακόλουθο πίνακα πειραματικών μετρήσεων, σχεδιάστε το κατάλληλο γράφημα και εφαρμόστε τη Μέθοδο Ελαχίστων Τετραγώνων (βλ. Σημείωση1) ώστε να προσδιορίσετε την ταχύτητα του φωτός c με το σφάλμα της (βλ. Σημείωση2).

$p^2/2K$ (Js^2/m^2) 10^{-30}	$K/2$ (J) 10^{-14}
1,03289	1,504
1,06667	1,840
1,09333	2,080
1,12000	2,352
1,14667	2,592
1,15378	2,656
1,18933	2,976
1,22489	3,328
1,24800	3,536
1,26578	3,664
1,30667	4,032
1,33689	4,320
1,37600	4,640

Δ. Πώς μπορείτε από τα προηγούμενα αποτελέσματα να προσδιορίσετε τη μάζα ηρεμίας m_o του ηλεκτρονίου με το σφάλμα της.

Σημείωση1: Έστω ότι έχουμε μετρήσει *N* ζεύγη τιμών x και y και βρήκαμε τις τιμές x_i και y_i, όπου *i*=1,2,3,…*N*. Αν ξέρουμε, ότι τα *x* και *y* συνδέονται με τη σχέση:

$$y = B \cdot x + A$$

μπορούμε να υπολογίσουμε τα *A* και *B* και να χαράξουμε την ευθεία *y*=*f*(*x*) χρησιμοποιώντας τους τύπους:

$$A = \frac{\sum_{i=1}^{N} x_i^2 \sum_{i=1}^{N} y_i - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} (x_i y_i)}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2} \qquad B = \frac{N\sum_{i=1}^{N} (x_i y_i) - \sum_{i=1}^{N} x_i \sum_{i=1}^{N} y_i}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}$$

Και για τα σφάλματα *δA* και *δB* των *A* και *B* αντίστοιχα:

$$\delta A = \sigma_y \sqrt{\frac{\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}} \qquad \delta B = \sigma_y \sqrt{\frac{N}{N\sum_{i=1}^{N} x_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right)^2}}$$

όπου για το σ_y ισχύει

$$\sigma_y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{N} (y_i - A - Bx_i)^2}{N-2}}$$

Σημείωση2: Έστω ότι έχουμε υπολογίσει τη μέση τιμή x ενός μεγέθους και το σφάλμα της δx. Αν για ένα παράγωγο μέγεθος y ισχύει $y = f(x)$, τότε το σφάλμα του δy προκύπτει από τη σχέση:

$$\delta y = f'(x) \cdot \delta x$$

όπου με $f'(x)$ συμβολίζεται η παράγωγος του y ως προς x.

Καλή Επιτυχία

Αν θέλετε, μπορείτε να κάνετε κάποιο γράφημα σ' αυτή τη σελίδα και να την επισυνάψετε μέσα στο τετράδιό σας.

Επιλέξτε τους άξονες, τιτλοδοτήστε και συμπεριλάβετε τις κατάλληλες μονάδες σε κάθε άξονα.

Γ΄ Λυκείου
ΦΥΛΛΟ ΑΠΑΝΤΗΣΕΩΝ

Θεωρητικό Μέρος

Θέμα 1ο

Α1. μ∈ [……… , ………]

Α2. μ∈ [……… , ………]

Β1. Σχεδιάστε το σχήμα στο τετράδιό σας.

Β2. ……………………………………………………………………………………………….

Θέμα 2ο

Α. $R_{ολ,1}$=……………..

Β. $R_{ολ,2}$=……………..

Θέμα 3ο

Α. Αντιγράψτε από το τετράδιό σας τον τελικό τύπο ……………..

Β. t_1=……………..

Γ. $\frac{\upsilon}{c}$ =……………..

υ =……………..

Δ. $E \rightarrow$ ……………..

……………………………………………………………………………………………….

Πειραματικό Μέρος

Α. Γράψτε την απόδειξη στο τετράδιό σας.

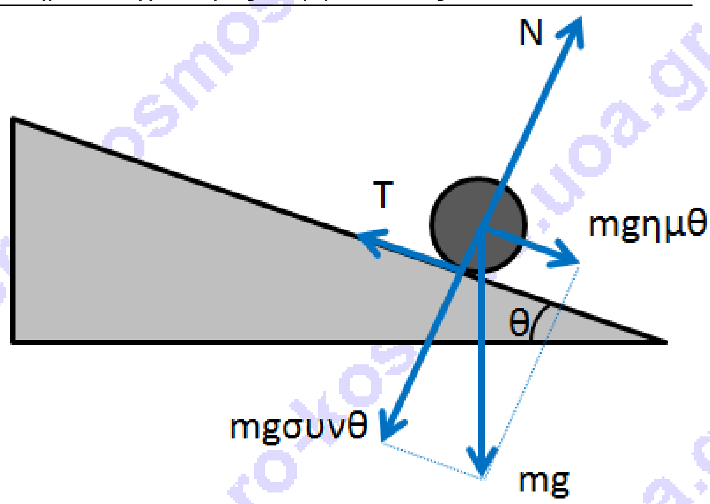
Β. υ =……………..

Γ. Σχεδιάστε το γράφημα στο μιλιμετρέ χαρτί

c =………… $\pm$………..

Δ. m_o =………… $\pm$………..

Συνοπτικές Απαντήσεις



Θέμα 1ο

A1. Μπορούμε να εκτοξεύσουμε το σώμα δίνοντάς του αρχική ταχύτητα στη μεταφορική κίνηση μόνο, ή, εναλλακτικά, και αρχική γωνιακή ταχύτητα, η οποία μπορεί να έχει την κατάλληλη τιμή ώστε η κίνηση να είναι εξ αρχής κύλιση χωρίς ολίσθηση ή όχι. Ακοούθως θα φανεί ότι το τελικό αποτέλεσμα δεν επηρεάζεται από τις παραλλαγές αυτές. Έστω λοιπόν ότι εκτοξεύουμε το σώμα ώστε εξ αρχής να εκτελέσεις κύλιση χωρίς ολίθηση (βλ. σχ.). Κατά τη σύνθετη κίνησή του επί επί του κ. επιπέδου, το σώμα επιβραδύνεται. Η μοναδική δύναμη με μη μηδενική ροπή, άρα ικανή να επηρεάσει τη στροφική του κίνηση, είναι η τριβή, η οποία πρέπει να έχει τη φορά που φαίνεται στο σχήμα, ώστε η στροφική κίνηση να είναι επιβραδυνόμενη.

Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδη Νόμο για τη μεταφορική κίνηση έχουμε:

$$\sum \vec{F_x} = m\vec{\alpha}_{cm} \Rightarrow \vec{T} + m\vec{g}\eta\mu\theta = m\vec{\alpha}_{cm}$$

Θεωρώντας ως θετική τη φορά προς τη βάση του κ. επιπέδου, έχουμε:

$$-T + mg\eta\mu\theta = ma_{cm} \Rightarrow T = mg\eta\mu\theta - ma_{cm}$$

Εφαρμόζοντας το Θεμελιώδη Νόμο για τη στροφική κίνηση προκύπτει:

$$\sum \tau = I\alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = I\alpha_{\gamma\omega\nu}$$

όπου με R συμβολίζεται η ακτίνα του σώματος και με I η ροπή αδράνειάς του. Αν είναι m η μάζα του σώματος, προφανώς ισχύει $I = \kappa m R^2$, με $\kappa \leq 1$.
Συνδυάζοντας τις δύο αυτές σχέσεις έχουμε:

$$TR = \kappa m R^2 \alpha_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = \kappa m R \alpha_{\gamma\omega\nu}$$

Αφού θεωρούμε την εκδοχή ο κύλινδρος να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύει:

$$R\alpha_{\gamma\omega\nu} = \alpha_{cm}$$

οπότε η τελευταία σχέση γράφεται:

$$T = \kappa m \alpha_{cm}$$

Συνδυάζοντάς την με την πρώτη έχουμε:

$$\kappa m \alpha_{cm} = mg\eta\mu\theta - ma_{cm} \Rightarrow (\kappa + 1)\alpha_{cm} = g\eta\mu\theta \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{1}{\kappa + 1} g\eta\mu\theta$$

Άρα το μέτρο της **απαιτούμενης** τριβής δίνεται από:

$$T = \frac{\kappa}{\kappa + 1} mg\eta\mu\theta$$

Η **διαθέσιμη** τριβή ισούται με μN. Προφανώς πρέπει να ισχύει $\mu N \geq T \Rightarrow$

$$\Rightarrow \mu N \geq \frac{\kappa}{\kappa+1} mg\eta\mu\theta \Rightarrow \mu mg\sigma\upsilon\nu\theta \geq \frac{\kappa}{\kappa+1} mg\eta\mu\theta$$

$$\Rightarrow \mu\sigma\upsilon\nu\theta \geq \frac{\kappa}{\kappa+1}\eta\mu\theta \Rightarrow \mu \geq \frac{\kappa}{\kappa+1}\varepsilon\varphi\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \mu \geq \frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\sqrt{3}}{3}$$

Το αποτέλεσμα αυτό δηλώνει ότι η οριακή τιμή του συντελεστή τριβής εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του στερεού σώματος στον όγκο του (παράγοντας κ).

Όταν λοιπόν ο συντελεστής τριβής έχει επαρκώς μεγάλη τιμή, η γωνιακή επιτάχυνση είναι τέτοια ώστε η ω να μειώνεται με το σωστό ρυθμό και να έχει κάθε στιγμή κατάλληλη τιμή ως προς τη υ_{cm}, βάσει της συνθήκης $\upsilon_{cm} = \omega R$, με αποτέλεσμα το σώμα να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

Αντιστρέφοντας το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει η συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται ώστε το σώμα να ολισθαίνει ταυτόχρονα με την κύλησή του:

$$\mu < \frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

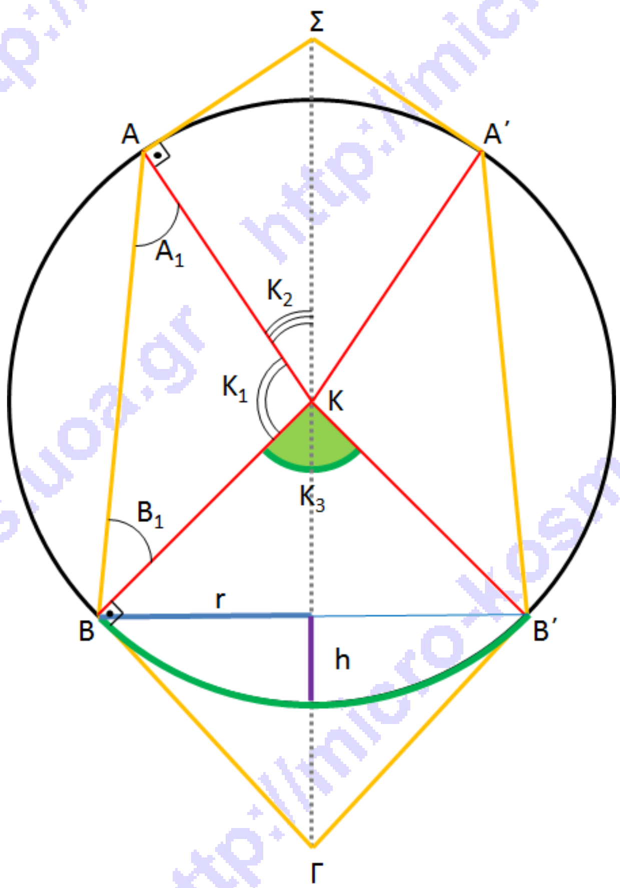
$$\Rightarrow \mu \in [\,0\,, \frac{\kappa}{\kappa+1}\frac{\sqrt{3}}{3})$$

Στην ακραία περίπτωση όπου $\mu = 0$, η συνισταμένη ροπή μηδενίζεται, οπότε έχουμε μόνο ολίσθηση.

Α2. Για την περίπτωση του κυκλικού δίσκου έχουμε: $\kappa = \frac{1}{2}$. Άρα:

$$\mu \in [\,0\,, \frac{\sqrt{3}}{9})$$

Β1. Έστω ότι το σπουργίτι βρίσκεται στο σημείο Σ (βλ. σχ.). Το τμήμα της επιφάνειας της σφαίρας που είναι ορατό από το σπουργίτι αποτελεί μια τρισδιάστατη επιφάνεια S_1 που οριοθετείται από τις ακτίνες ΣΑ και ΣΑ΄, δηλαδή, τις εφαπτόμενες του κύκλου που φέρονται από το Σ. Η τομή της S_1 με το επίπεδο του σχήματος είναι το τόξο ΑΑ΄.



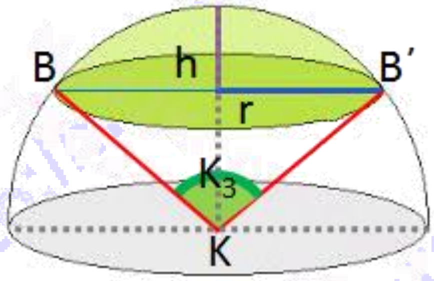
Θα δείξουμε ότι η S_1 οριοθετεί το οπτικό πεδίο του σπουργιτιού στην αντίθετη πλευρά της σφαίρας. Λόγω συμμετρίας, η συμπεριφορά της ακτίνας ΣΑ αντικατοπτρίζεται στην ΣΑ΄. Θα περιορίσουμε λοιπόν την περιγραφή μας στην πρώτη.

Η ΣΑ υφίσταται διάθλαση στο σημείο Α, εισέρχεται στο εσωτερικό της σφαίρας, διαδίδεται σε αυτή, εξέρχεται σε σημείο έστω Β και συναντιέται με τη διπλά διαθλασμένη κατοπτρική της ΣΑ΄ σε σημείο έστω Γ.

Άρα η μύγα θα είναι ορατή όταν κινείται σε τμήμα της σφαίρας που είναι μια τρισδιάστατη επιφάνεια της οποίας η τομή με το επίπεδο του σχήματος είναι το τόξο ΒΒ΄ (στο σχ.

επισημαίνεται με πράσινο χρώμα). Αν η μύγα κινηθεί στις περιοχές της επιφάνειας της σφαίρας των οποίων η τομή με το σχήμα είναι τα τόξα ΑΒ και Α΄Β΄, τότε θα είναι αόρατη από το σπουργίτι.

Ως μια τρισδιάστατη αναπαράσταση δίνεται το ακόλουθο σχήμα.



Β2. Αφού η ΣΑ εφάπτεται στον κύκλο η γωνία πρόσπτωσης $\Sigma\hat{A}K$ είναι ορθή. Εφαρμόζοντας το Νόμο του Snell στο σημείο Α προκύπτει:

$$n_\alpha \eta\mu\frac{\pi}{2} = n\eta\mu\hat{A}_1 \Rightarrow \eta\mu\hat{A}_1 = \frac{1}{n} \Rightarrow \eta\mu\hat{A}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \hat{A}_1 = \frac{\pi}{4}$$

Στο δισδιάστατο σχήμα το τρίγωνο ΚΑΒ είναι προφανώς ισοσκελές, άρα

$$\hat{B}_1 = \hat{A}_1$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\hat{K}_1 = \pi - 2\hat{A}_1 = \frac{\pi}{2}$$

Εξ άλλου, με νέα εφαρμογή του νόμου του Snell στο σημείο Β, βρίσκουμε ότι η ακτίνα εξέρχεται στον αέρα εφαπτομενικά στη σφαίρα.

Στο τρίγωνο ΣΑΚ ισχύει:

$$\sigma\upsilon\nu\hat{K}_2 = \frac{AK}{\Sigma K} = \frac{R}{s+R} = \frac{R}{\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}R + R} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow \hat{K}_2 = \frac{\pi}{6}$$

Δεδομένου ότι:

$$\hat{K}_3 = 2\pi - 2(\hat{K}_1 + \hat{K}_2)$$

καταλήγουμε ότι για τη γραμμοσκιασμένη γωνία ισχύει:

$$\hat{K}_3 = \frac{2\pi}{3}$$

Επιπρόσθετα ,μπορούμε να υπολογίσουμε τα μήκη r και h που εμφανίζονται στο τρισδιάστατο σχήμα.

Συγκεκριμένα:

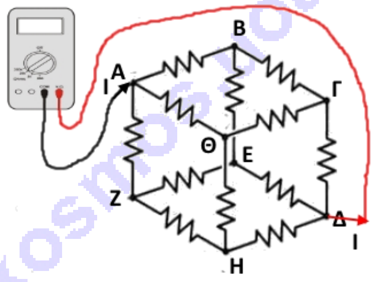
$$r = \frac{BB'}{2} = K B\eta\mu\frac{K_3}{2} = R\eta\mu\frac{\pi}{3} \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}R \Rightarrow r = \frac{\sqrt{3}}{2}m$$

και

$$h = R - R\sigma\upsilon\nu\frac{\pi}{3} \Rightarrow h = \frac{R}{2} \Rightarrow h = 0{,}5m$$

Θέμα 2ο

Α. Για να μετρήσει το ωμόμετρο την αντίσταση μεταξύ των σημείων Α και Δ εφαρμόζει μια τάση στα σημεία αυτά και μετρά το ρεύμα που το διαρρέει ή μετρά την διάφορα δυναμικού στα σημεία Α και Δ παρέχοντας στο κύκλωμα ρεύμα σταθερής έντασης. Έστω I το ρεύμα που εισέρχεται στον κόμβο Α. Λόγω της συμμετρίας το ρεύμα I θα χωριστεί ισομερώς με καθένα από τους κλάδους ΑΒ, ΑΖ και ΑΘ να διαρρέεται από ρεύμα $\frac{I}{3}$. Ομοίως, στον κόμβο Β το ρεύμα θα χωριστεί ξανά ισομερώς δίνοντας στους κλάδους ΒΓ και ΒΕ ρεύμα $\frac{I}{6}$. Τέλος το ρεύμα που θα διαρρέει τον κλάδο ΓΔ θα είναι $\frac{I}{3}$(ως άθροισμα των ρευμάτων $\frac{I}{6}$ που διαρρέει τον κλάδο ΒΓ και $\frac{I}{6}$ που διαρρέει τον κλάδο ΕΓ). Η διαφορά δυναμικού μεταξύ των κόμβων Α και Δ θα είναι:



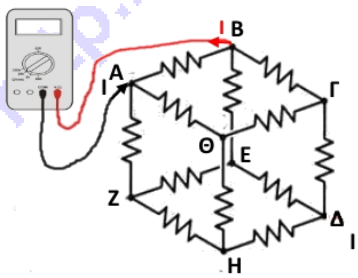
$$V_{ΑΔ}=V_{ΑΒ}+V_{ΒΓ}+V_{ΓΔ}\Rightarrow V_{ΑΔ}=R\cdot I_{ΑΒ}+R\cdot I_{ΒΓ}+R\cdot I_{ΓΔ}\Rightarrow V_{ΑΔ}=R\cdot\frac{I}{3}+R\cdot\frac{I}{6}+R\cdot\frac{I}{3}\Rightarrow V_{ΑΔ}=\frac{5}{6}RI\Rightarrow V_{ΑΔ}=5I\ .$$

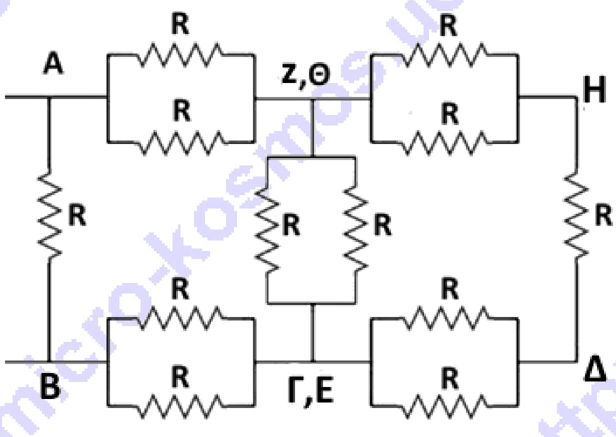
Άρα η τιμή της ένδειξης του ωμομέτρου είναι

$$R_{ολ,1} = 5\ \Omega$$

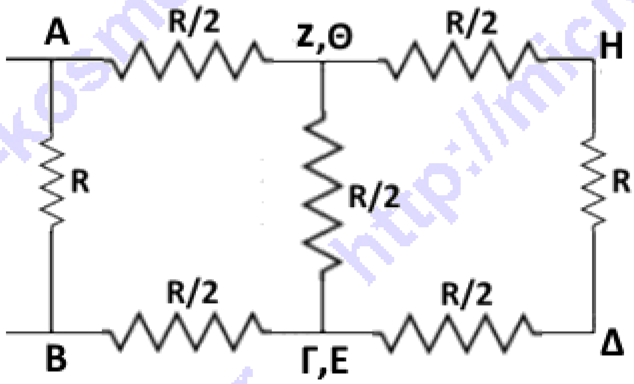
ίση με την ισοδύναμη αντίσταση του κυκλώματος που είναι τα 5/6 της τιμής κάθε μιας αντίστασης του.

Β. Λαμβάνοντας ξανά υπόψη τη συμμετρία του κυκλώματος παρατηρούμε ότι για τις κορυφές Ζ και Θ το ρεύμα που το διαρρέει είναι συμμετρικό (το ίδιο συμβαίνει και για τα σημεία Γ και Ε) άρα το δυναμικό σε αυτές είναι το ίδιο. Σχεδιάζοντας ένα ισοδύναμο κύκλωμα μπορούμε λοιπόν να συνδέσουμε τα σημεία Ζ,Θ και Γ,Ε:



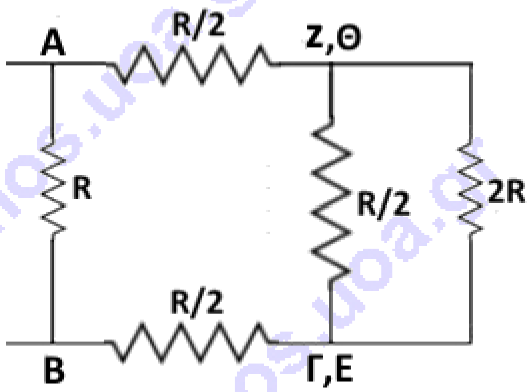


Αντικαθιστούμε το κάθε ζεύγος παράλληλα συνδεδεμένων αντιστάσεων με την ισοδύναμη τους $\frac{1}{R_{ισ1}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \Rightarrow R_{ισ1} = \frac{R}{2}$ έχουμε

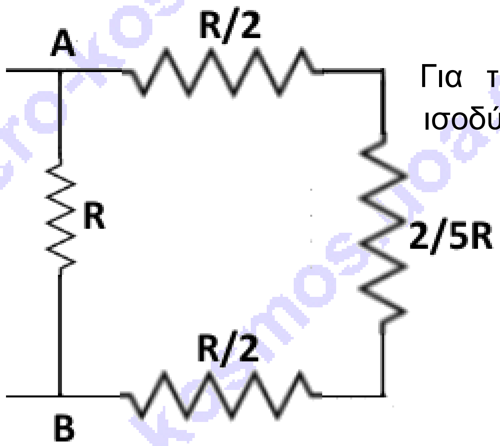


συνεχίζοντας για τις αντιστάσεις στο τμήμα ΒΘ, Δ, Γ, ΕΗ που είναι σε σειρά

$$R_{ισ\,2} = \frac{R}{2} + R + \frac{R}{2} \Rightarrow R_{ισ\,2} = 2R$$



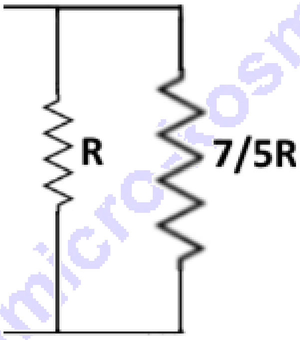
Και για τις επόμενες $\frac{1}{R_{ισ\,3}} = \frac{1}{\frac{R}{2}} + \frac{1}{2R} \Rightarrow R_{ισ\,3} = \frac{2}{5}R$



Για τις τρεις σε σειρά αντιστάσεις που υπάρχουν στο ισοδύναμο κύκλωμα θα ισχύει

$$R_{ισ\,4} = \frac{R}{2} + \frac{2}{5}R + \frac{R}{2} \Rightarrow R_{ισ\,4} = \frac{7}{5}R$$

Τέλος το ισοδύναμο κύκλωμα μας έχει μόνο δυο αντιστάσεις συνδεδεμένες παράλληλα και η ολική αντίσταση του θα είναι: $\frac{1}{R_{ολ,2}} = \frac{1}{R} + \frac{5}{7R} \Rightarrow \frac{1}{R_{ολ,2}} = \frac{7+5}{7R} \Rightarrow R_{ολ,2} = \frac{7R}{12} \Rightarrow R_{ολ,2} = 3{,}5\ Ω$



Θέμα 3°

Α. Θεωρούμε ότι το ηλεκτρόνιο κινείται σε κυκλική τροχιά.

Η κεντρομόλος δύναμη που διατηρεί το ηλεκτρόνιο σε κυκλική τροχιά γύρω από το πρωτόνιο είναι ίση με τη δύναμη Coulomb. Οπότε (θυμηθείτε ότι στο σύστημα cgs η $K_{ηλ}$ ισούται με τη μονάδα):

$$\frac{q^2}{r^2} = \frac{m\upsilon^2}{r} \Rightarrow \upsilon = \sqrt{\frac{q^2}{mr}} \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου δίνεται από τη σχέση:

$$K = \frac{1}{2}m\upsilon^2 = \frac{q^2}{2r} \quad (2)$$

Το πρόβλημα μας ζητά να συγκρίνουμε την πιο πάνω ενέργεια με την ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο σε κάθε περιφορά του γύρω από το πρωτόνιο. Όμως η σχέση του Larmor μας δίνει την ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο στη μονάδα του χρόνου. Επομένως, πρέπει να προσδιορίσουμε την περίοδο περιφοράς του ηλεκτρονίου. Αφού έχουμε θεωρήσει ότι το ηλεκτρόνιο εκτελεί κυκλική τροχιά, μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε ότι και η γωνιακή ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι σταθερή. Επομένως, ο χρόνος μιας περιφοράς του ηλεκτρονίου γύρω από το πρωτόνιο είναι ίσος με:

$$T = \frac{2\pi r}{\upsilon} \quad (3)$$

Άρα, η μεταβολή της ενέργειας του ηλεκτρονίου *__σε κάθε περιφορά__* είναι ίση με:

$$\Delta E \approx \frac{dE}{dt}\Delta t = -\frac{2}{3}\frac{q^2\alpha^2}{c^3}T = -\frac{2}{3}\frac{q^2}{c^3}\left(\frac{\upsilon^2}{r}\right)^2\left(\frac{2\pi r}{\upsilon}\right) = -\frac{4\pi}{3}\frac{q^2}{r}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^3$$

όπου θέσαμε το α ίσο με την κεντρομόλο επιτάχυνση

Ο λόγος των δύο ενεργειών είναι ίσος με:

$$\frac{|\Delta E|}{K} = \frac{8\pi}{3}\left(\frac{\upsilon}{c}\right)^3 << 1$$

Η πιο πάνω ανισότητα ισχύει όταν το ηλεκτρόνιο κινείται με μη σχετικιστικές ταχύτητες, δηλαδή ισχύει για υ << c. Παρατηρούμε, λοιπόν, πως η ενέργεια που χάνει το ηλεκτρόνιο σε κάθε περιφορά του γύρω από το πρωτόνιο είναι πολύ μικρή σε σύγκριση με την κινητική του ενέργεια. Αυτό σημαίνει πως μπορούμε με ασφάλεια να θεωρήσουμε ότι η τροχιά του ηλεκτρονίου είναι κυκλική κάθε χρονική στιγμή.

Β. Αρχικά υπολογίζουμε την ολική ενέργεια του ηλεκτρονίου συναρτήσει της ακτίνας r:

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{q^2}{r} = \frac{q^2}{2r} - \frac{q^2}{r} = -\frac{q^2}{2r} \qquad (4)$$

Την τελευταία σχέση την εισάγουμε στη σχέση του Larmor, οπότε έχουμε:

$$\frac{dE}{dt} = \frac{d}{dt}\left(-\frac{q^2}{2r}\right) = -\frac{2}{3}\frac{q^2\alpha^2}{c^3} \Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{4}{3c^3}\alpha^2 = \frac{4}{3c^3}\left(\frac{\upsilon^2}{r}\right)^2 \overset{(1)}{\Rightarrow}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{r}\right) = \frac{4}{3}\frac{q^4}{m^2c^3r^4} \Rightarrow -\frac{1}{r^2}\frac{dr}{dt} = \frac{4}{3}\frac{q^4}{m^2c^3r^4} \Rightarrow r^2\frac{dr}{dt} = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{m^2c^3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r^2 dr = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{m^2c^3}dt \Rightarrow \int_{r_{\alpha\rho\chi}}^{r_{\tau\varepsilon\lambda}} r^2 dr = \sigma\tau\alpha\theta \int_0^{t_1} dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{3}\left(r_{\tau\varepsilon\lambda}^3 - r_{\alpha\rho\chi}^3\right) = -\frac{4}{3}\frac{q^4}{m^2c^3}t_1 \Rightarrow \boxed{t_1 = \frac{m^2c^3}{4q^4}\left(r_{\tau\varepsilon\lambda}^3 - r_{\alpha\rho\chi}^3\right)}$$

Στην τελευταία σχέση αν αντικαταστήσουμε όπου $r_{\alpha\rho\chi} = 1\text{Å}$ και όπου $r_{\tau\varepsilon\lambda} = 1\text{fm}$, τότε ο χρόνος που θα προκύψει θα είναι ίσος με $t_1 = 1{,}1 \cdot 10^{-10}\text{s}$

Γ. Στην σχέση (1) αντικαθιστούμε όπου r=0,5Å , οπότε το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου το υπολογίζουμε ίσο με $\upsilon = 2{,}3 \cdot 10^8\,\text{cm/s}$. Στη συνέχεια, συγκρίνουμε την ταχύτητά του με την ταχύτητα του φωτός, οπότε έχουμε:

$$\frac{\upsilon}{c} = \frac{2{,}3 \cdot 10^8\,\text{cm/s}}{3 \cdot 10^{10}\,\text{cm/s}} = 0{,}0075$$

Στη σχέση (1) για r=1fm το μέτρο της ταχύτητας του ηλεκτρονίου είναι ίσο με $\upsilon = \sqrt{\frac{q^2}{mr}} = 7{,}3 \cdot 10^{10}\,\text{cm/s} > 3 \cdot 10^{10}\,\text{cm/s}$. Η ταχύτητα που προκύπτει είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός κάτι το οποίο δεν μπορεί να συμβεί.

Δ. Από τη σχέση (4) συμπεραίνουμε πως καθώς το ηλεκτρόνιο πλησιάζει το πρωτόνιο, δηλαδή καθώς $r \to 0$, η ενέργεια τείνει προς το $-\infty$. Επομένως, δεν υπάρχει ελάχιστη τιμή σε αυτό το κλασικό μοντέλο, γεγονός που είναι αντίθετο με το κβαντομηχανικό μοντέλο του ατόμου.

Πειραματικό Μέρος

Α. Η σχέση (1) τροποποιείται ως εξής:

$$E=\gamma m_0c^2 \Rightarrow \frac{E}{m_0c^2}=\gamma \Rightarrow \left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2=\gamma^2 \quad (4)$$

Η σχέση (2) γίνεται:

$$p=\gamma m_0\upsilon \Rightarrow p=\frac{\gamma m_0\upsilon\cdot c}{c} \Rightarrow \frac{p}{m_0c}=\frac{\gamma\upsilon}{c} \Rightarrow \left(\frac{p}{m_0c}\right)^2=\left(\frac{\gamma\upsilon}{c}\right)^2 \Rightarrow \left(\frac{p}{m_0c}\right)^2=\frac{\gamma^2\upsilon^2}{c^2} \quad (5)$$

Στη συνέχεια αφαιρούμε κατά μέλη τις σχέσεις (4) και (5)

$$\left(\frac{E}{m_0c^2}\right)^2-\left(\frac{p}{m_0c}\right)^2=\gamma^2\left(1-\frac{\upsilon^2}{c^2}\right) \overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{E^2}{\left(m_0c^2\right)^2}-\frac{p^2}{m_0{}^2c^2}=\gamma^2\cdot\frac{1}{\gamma^2}=1$$

Στην τελευταία σχέση πολλαπλασιάζουμε όλα τα μέλη με $\left(mc^2\right)^2$, οπότε προκύπτουν τα εξής:

$$E^2-\frac{p^2m_0{}^2c^4}{m_0{}^2c^2}=\left(m_0c^2\right)^2 \Rightarrow E^2=\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2$$

$$\Rightarrow \left.\begin{aligned} E&=\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2} \\ E&=K+m_0c^2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{K=\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2}-m_0c^2}$$

Β. Από τη σχέση (1) γνωρίζουμε ότι $K=E-m_0c^2$. Όμως $K=m_0c^2$, οπότε έχουμε τα ακόλουθα:

$$E-m_0c^2=m_0c^2 \Rightarrow E=2m_0c^2 \overset{E=\gamma m_0c^2}{\Rightarrow} \gamma m_0c^2=2m_0c^2 \Rightarrow \gamma=2$$

$$\overset{(3)}{\Rightarrow} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}}=2 \Rightarrow \frac{1}{1-\frac{\upsilon^2}{c^2}}=4 \Rightarrow 1-\frac{\upsilon^2}{c^2}=\frac{1}{4} \Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2}=1-\frac{1}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\upsilon^2}{c^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow \upsilon^2=\frac{3}{4}c^2 \Rightarrow \upsilon=\sqrt{\frac{3}{4}}c$$

Γ. Από τη σχέση που αποδείξαμε παραπάνω έχουμε:

$$K=\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2}-m_0c^2 \Rightarrow K+m_0c^2=\sqrt{\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2}$$

$$\Rightarrow \left(K+m_0c^2\right)^2=\left(m_0c^2\right)^2+\left(pc\right)^2 \Rightarrow K^2+2Km_0c^2=p^2c^2 \Rightarrow \frac{K^2}{2K}+\frac{2Km_0c^2}{2K}=\frac{p^2c^2}{2K}$$

$$\Rightarrow \frac{K}{2c^2}+m_0=\frac{p^2}{2K} \Rightarrow \boxed{\frac{p^2}{2K}=\frac{1}{c^2}\left(\frac{K}{2}\right)+m_0}$$

Παρατηρούμε πως η τελευταία σχέση είναι εξίσωση ευθείας της μορφής $y = Bx + A$ με $B = \frac{1}{c^2}$ και $A = m_0$.

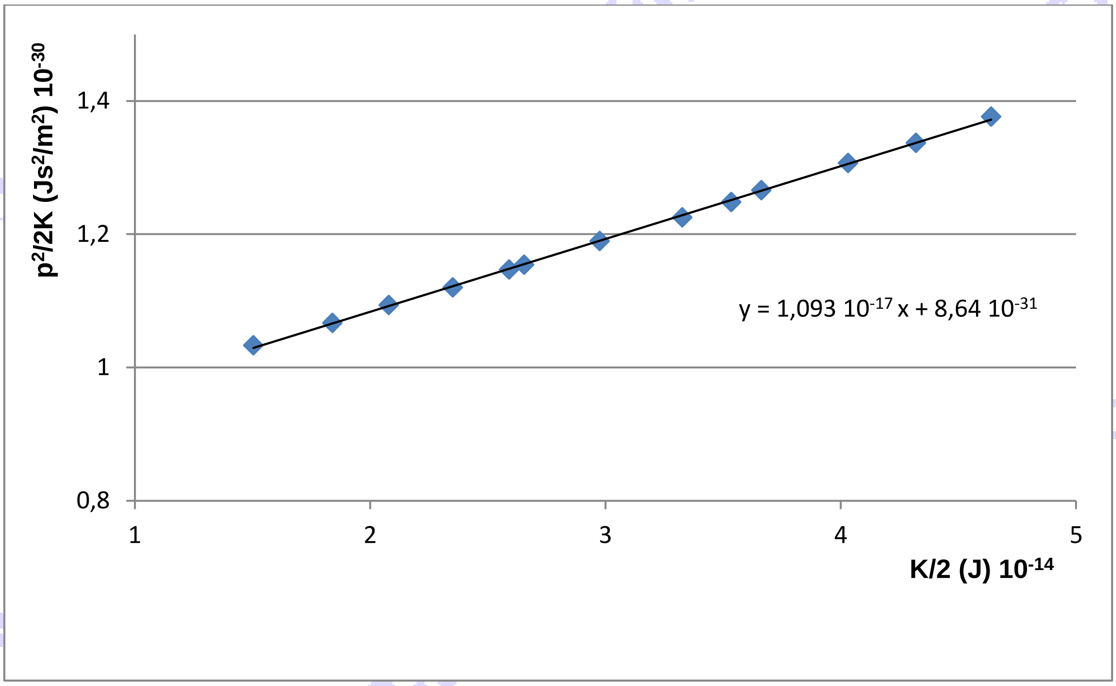
Εφαρμόζοντας τη Μέθοδο των Ελαχίστων Τετραγώνων προσδιορίζουμε τις τιμές των συντελεστών α και β ως εξής:

$$B = (1{,}093 \pm 0{,}007)10^{-17}(s/m)^2$$

και

$$A = (8{,}64 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-31} kg$$

Άρα το ζητούμενο διάγραμμα για τον υπολογισμό της ταχύτητας του φωτός είναι το παρακάτω:



Τελικά η ταχύτητα του φωτός από τα πειραματικά δεδομένα είναι:

$$c = \sqrt{\frac{1}{B}} = (3{,}03 \pm 0{,}02)10^8\ m/s$$

Για τον υπολογισμό του σφάλματος χρησιμοποιήσαμε τα όσα αναφέρονται στη Σημείωση2 της εκφώνησης.

Δ. Από την τιμή του Β που προσδιορίσαμε στο προηγούμενο ερώτημα προκύπτει

$$m_o = (8{,}64 \pm 0{,}02) \cdot 10^{-31} kg$$

Η τιμή αυτή πλησιάζει την αναφερόμενη στη βιβλιογραφία:

$$m = 9{,}1 \cdot 10^{-31} kg$$